

**OTIMIZAÇÃO DO DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE DE  
CONFIABILIDADE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA**

**ALAN VAZ LOPES**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM TECNOLOGIA AMBIENTAL E  
RECURSOS HÍDRICOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**OTIMIZAÇÃO DO DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE DE  
CONFIABILIDADE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA**

**ALAN VAZ LOPES**

**ORIENTADOR: PROF. SÉRGIO KOIDE**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM TECNOLOGIA AMBIENTAL  
E RECURSOS HÍDRICOS**

**PUBLICAÇÃO: PTARH.DM – 050A/2002**

**BRASÍLIA / DF: MAIO / 2002**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

OTIMIZAÇÃO DO DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE DE  
CONFIABILIDADE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA

ALAN VAZ LOPES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS.

APROVADA POR:

---

SÉRGIO KOIDE, Ph.D (UnB)  
(ORIENTADOR)

---

NÉSTOR ALDO CAMPANA, D.Sc (UnB)  
(EXAMINADOR INTERNO)

---

HEBER PIMENTEL GOMES, D.Sc (UFPB)  
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA / DF, 28 DE MAIO DE 2002.

## FICHA CATALOGRÁFICA

LOPES, ALAN VAZ

Otimização do Dimensionamento e Análise de Confiabilidade de Redes de Distribuição de Água [Distrito Federal] 2002. 148p. 297 mm (ENC/FT/UnB, Mestre em Tecnologia Ambiental e Recursos Hídricos, 2002).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

1. Rede de Distribuição de Água

2. Otimização Matemática

3. Análise de Confiabilidade

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LOPES, A. V. (2002). **Otimização do Dimensionamento e Análise de Confiabilidade de Redes de Distribuição de Água**. Dissertação de Mestrado, Publicação PTARH.DM – 050A/2002, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 148p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Alan Vaz Lopes

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Otimização do Dimensionamento e Análise de Confiabilidade de Redes de Distribuição de Água

GRAU/ANO: Mestre/2002

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos ou científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Alan Vaz Lopes

SQN 202 Bloco C Apto. 203

CEP 70832-030 – Brasília/DF – Brasil, e-mail: vazlopes@hotmail.com

## **DEDICATÓRIA**

*(in memoriam)*

A Moacyr dos Santos Vaz,  
homem digno e honrado,  
de caráter cristalino e firme,  
cuja coragem e esperança  
serão sempre guias  
para os que acreditam  
que não há o que não  
possa ser superado

# AGRADECIMENTOS

Ao professor Sérgio Koide, pela orientação objetiva e competente, pela motivação, pelo incansável comprometimento e dedicação ao ensino e à pesquisa científica brasileira e pelos ensinamentos sempre oportunos e valiosos.

Aos professores do recém criado PTARH Cristina Célia Brandão, Marco Antônio Almeida de Souza, Nabil Joseph Eid, Néstor Aldo Campana, Oscar de Moraes Cordeiro Netto, Ricardo Silveira Bernardes, pelo apoio, dedicação, obstinação e primazia no cumprimento da difícil tarefa de fazer e acreditar na ciência em meio às cotidianas adversidades.

Aos colegas da turma de 2000 Arlene Nascimento, Daniel Peres, Érika Ferreira, Gustavo Carneiro, Jazieli Sá, Sérgio Soares, Paulo Roberto e aos demais colegas do PTARH pelo companheirismo, apoio e incentivo.

Aos professores e colegas de profissão que direta ou indiretamente colaboraram ou contribuíram nas necessárias discussões durante o desenvolvimento deste trabalho, entre eles, André Costa (UFRJ), Antônio Righetto (UFRN), Heber Gomes (UFPB), Cynthia Medeiros (UNICAMP), Marcos Pufal (UnB), Maria da Paz (CAESB), Raquel Brostel (CAESB) e Uelibia (CAESB).

À CAPES pela concessão da bolsa de estudos, que tornou viável a realização desta pesquisa.

À CAESB pela disponibilização de dados essenciais ao desenvolvimento desta pesquisa.

Aos amigos e constantes motivadores, em especial Danielly Machado e a Matriz (VP).

Aos meus amigos e família, em especial, André Vaz Lopes, Helen Vaz Lopes e João Vieira Lopes, imprescindíveis, absolutos, únicos.

# RESUMO

Redes de distribuição de água constituem a maior parcela dos investimentos dos sistemas de abastecimento e o seu dimensionamento possui estreita ligação com a qualidade dos serviços. Neste contexto, este estudo pretende implementar e analisar modelos de otimização que reduzam custos de implantação de redes de água e avaliem os resultados sob uma abordagem de confiabilidade de sistemas.

O modelo de otimização implementado é baseado na relaxação de equações que descrevem o comportamento hidráulico das redes e no uso de técnicas de programação linear e programação inteira associadas, com o objetivo de alcançar o ótimo global do problema de minimização de custo. O modelo original é adaptado para casos particulares de expansão e reforço de redes de água e um procedimento baseado na programação não linear para determinar dados iniciais necessários é proposto.

O modelo de análise da confiabilidade utiliza um modelo hidráulico nodal para promover simulações da rede em situações de rompimentos de trechos. O desempenho do sistema e a probabilidade de ocorrência de falhas são associados a índices que quantificam a confiabilidade da rede de água.

Aplicações reais são conduzidas nas redes de água de João Pessoa/PB, Apucarana/PR e Paranoá/DF, que apresentam características particulares de projeto, para avaliar o desempenho dos modelos e confrontar seus resultados com outras metodologias. Essas aplicações permitiram o teste e a avaliação dos modelos sob diversos aspectos e situações reais.

O estudo demonstrou que o modelo de otimização implementado possui grande potencial de aplicação a problemas reais de dimensionamento de redes e pode contribuir para significativa redução dos custos de implantação. O modelo de análise da confiabilidade mostrou eficiência na previsão do comportamento do sistema sob situações críticas. O uso conjunto de técnicas de otimização e conceitos de confiabilidade pode auxiliar na fase de projeto de redes, visando o planejamento a longo prazo focado na redução de custos e manutenção da qualidade dos serviços.

# ABSTRACT

Water distribution nets constitute the major part of the supply systems investments and their design have close relation to the quality of services. In this context this study intends to implement and analyze optimization models that reduce water nets implantation costs and evaluate the results under a systems reliability approach.

The implemented optimization model is based on the relaxation of the equations that describe the network hydraulic behavior and on the use of associated linear programming and integer programming techniques with the objective of reaching the global optimum of the cost minimization problem. Then original model is adapted to particular cases of expansion and reinforcing of water nets and a procedure based on the nonlinear programming to determinate necessary initial data is proposed.

The reliability analysis model utilizes a nodal hydraulic model to promote net simulations on situations of pipe bursts. The system performance and the occurrence probability of fails are associated to indices that quantify the water net reliability.

Real Applications are conducted in the water nets of João Pessoa/PB, Apucarana/PR and Paranoá/DF that present particular design characteristics to evaluate the performances of the models e to confront their results with others methodologies. These applications allowed the test and evaluation of the models under several aspects and real situations.

The study demonstrated that the implemented optimization model has great potential of application to real water nets design problems and may contribute to significant reduction of the implantation costs. The reliability analysis model showed efficiency in the prevision of the system behavior under critical situations. The combined use of the optimization techniques and reliability concepts may help at the water net design phase objecting long term planning focused on the costs reduction and quality of services.



# ÍNDICE

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	1
1.1. OBJETIVOS	3
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	4
2.1. ESCOAMENTO EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO	4
2.2. ANÁLISE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA	6
2.2.1. Redes de Distribuição de água	7
2.2.2. Elaboração do Modelo Computacional	8
2.2.3. Simulação do Sistema de Distribuição de Água	10
2.2.4. Otimização de Redes de Distribuição	12
2.3. MODELAGEM HIDRÁULICA DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA	12
2.3.1. Formulações Matemáticas	12
2.3.2. Métodos de Solução	16
2.4. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA	19
2.4.1. Conceitos Fundamentais em Otimização de Funções	22
2.4.2. Multiplicadores de Lagrange	24
2.4.3. Programação Linear	26
2.4.4. Programação Inteira e o Algoritmo <i>Branch and Bound</i>	28
2.5. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS	31
<b>3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	33
3.1. OTIMIZAÇÃO DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA	33
3.2. CONFIABILIDADE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA	43
<b>4. METODOLOGIA</b>	48
<b>5. OTIMIZAÇÃO GLOBAL DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO</b>	52
5.1. O MODELO DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL	52
5.1.1. Variáveis	53
5.1.2. Formulação do Problema	53
5.1.3. Relaxação	57
5.1.4. Problema Relaxado – Limite Inferior da Função Objetivo	58

5.1.5. Problema Exato – Limite Superior da Função Objetivo	62
5.1.6. Algoritmo <i>Branch and Bound</i>	63
5.2. ADAPTAÇÃO PARA EXPANSÃO DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO	65
5.2.1. Problema Relaxado	66
5.2.2. Problema Exato	67
5.3. USO DO MODELO PARA REFORÇO DE REDES – TRECHOS EM PARALELO	68
5.4. DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DOS INTERVALOS DE VAZÃO	69
<b>6. CONFIABILIDADE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA</b>	<b>72</b>
6.1. O MODELO DE ANÁLISE DE CONFIABILIDADE	72
6.1.1. Configurações de Falha	72
6.1.2. Performance Hidráulica Nodal – PHN	74
6.1.3. Performance Hidráulica Global – PHG	76
6.1.4. Índice de Confiabilidade – ICF	77
6.2. A RELAÇÃO ENTRE CUSTO E CONFIABILIDADE	78
6.2.1. Variação da Confiabilidade	79
6.2.2. Variação do Custo	81
6.2.3. Algoritmo de Alteração de Diâmetros	82
<b>7. APLICAÇÕES E RESULTADOS</b>	<b>84</b>
7.1. EXEMPLO 1 – REDE DE DOIS ANÉIS	84
7.1.1. Aplicação do Modelo de Otimização	86
7.1.2. Aplicação do Modelo de Análise de Confiabilidade	96
7.2. EXEMPLO 2 – REDE DO BAIRRO BESSA	104
7.2.1. Aplicação do Modelo de Otimização	106
7.3. EXEMPLO 3 – REDE DE APUCARANA	111
7.3.1. Aplicação do Modelo de Otimização	114
7.3.2. Aplicação do Modelo de Análise de Confiabilidade	119
7.4. EXEMPLO 4 – REDE DO PARANOÁ	124
7.4.1. Aplicação do Modelo de Otimização	127
7.4.2. Aplicação do Modelo de Análise de Confiabilidade	132
<b>8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>139</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>144</b>

# ÍNDICE DE TABELAS

2.1. Trechos a serem simulados segundo os objetivos	8
2.2. Condições limitantes de demanda de acordo com os componentes	10
2.3. Parâmetros para a análise de sensibilidade	12
2.4. Problemas de Programação Matemática	21
2.5. Alguns Métodos e técnicas de solução	22
2.6. Relações entre os problemas primal e dual	27
6.1. Funções $PHN1$ , $PHN2$ e $PHN$ em todos os casos possíveis	75
7.1. Dados dos diâmetros disponíveis da rede de dois anéis	85
7.2. Dados dos nós da rede de dois anéis	86
7.3. Dados dos trechos da rede de dois anéis	86
7.4. Resultados da resolução do primeiro problema relaxado da rede de dois anéis	91
7.5. Resultados finais da otimização da rede de dois anéis – vazões e diâmetros	95
7.6. Resultados finais da otimização da rede de dois anéis – cargas hidráulicas	95
7.7. Resultados obtidos por outros estudos na rede de dois anéis – custos	96
7.8. Probabilidades de ocorrência das configurações de falha na rede de dois anéis	97
7.9. Cargas hidráulicas da rede de dois anéis ótima sob configurações de falha	97
7.10. Vazões disponíveis da rede de dois anéis ótima sob configurações de falha	98
7.11. Índices de performances hidráulicas $PHN$ e $PHG$ da rede de dois anéis ótima	98
7.12. Processo de alteração de diâmetros na rede de dois anéis ótima	99
7.13. Resumo do processo de alteração de diâmetros na rede de dois anéis ótima	100
7.14. Dados dos diâmetros disponíveis da rede do Bessa	106
7.15. Dados dos nós da rede do Bessa	106
7.16. Dados dos trechos da rede do Bessa	106
7.17. Resultados finais da otimização da rede do Bessa – vazões e diâmetros	107
7.18. Resultados obtidos por outros estudos na rede do Bessa – vazões	108
7.19. Resultados obtidos por outros estudos na rede do Bessa – diâmetros	109
7.20. Resultados finais da rede do Bessa – cargas hidráulicas	109
7.21. Resultados obtidos por outros estudos na rede do Bessa – custos	110
7.22. Dados dos diâmetros disponíveis da rede de Apucarana	111
7.23. Dados dos nós da rede de Apucarana	113
7.24. Dados dos trechos da rede de Apucarana	114
7.25. Resultados finais da otimização da rede de Apucarana – vazões e diâmetros	116
7.26. Resultados finais da otimização da rede de Apucarana – cargas hidráulicas	117
7.27. Resultados obtidos por outros estudos na rede de Apucarana – custos	118

7.28. Probabilidades de falha e índices de performance da rede Apucarana	119
7.29. Resumo do processo de alteração de diâmetros na rede de Apucarana	121
7.30. Dados dos diâmetros disponíveis da rede Paranoá	124
7.31. Dados dos nós da rede Paranoá	126
7.32. Dados dos trechos da rede Paranoá	127
7.33. Diâmetros disponíveis nos trechos da rede do Paranoá	128
7.34. Resultados finais da otimização da rede Paranoá – vazões e diâmetros	130
7.35. Resultados finais da otimização da rede Paranoá – cargas hidráulicas	131
7.36. Ajuste dos trechos dispostos em paralelo da rede Paranoá	132
7.37. Resultados obtidos por outros estudos na rede Paranoá	133
7.38. Processo de alteração de diâmetros na rede Paranoá	134

# ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Representação da distribuição de tensões e perda de carga em tubulações	4
2.2. Representação de uma rede de distribuição de água por trechos conectados por nós	7
2.3. Processo de análise de redes de distribuição	9
2.4. Conjuntos convexos e côncavos	23
2.5. Máximos e mínimos locais e globais	23
2.6. Funções convexas (a) e côncavas (b) para $f=0,5$	24
2.7. Diagrama em árvore representando o algoritmo <i>Branch and Bound</i>	30
3.1. Modelo de otimização LPG de Alperovits e Shamir (1977)	36
3.2. Modelo de otimização de Morgan e Goulter (1985)	37
3.3. Modelo de otimização de Lansey e Mays (1989)	39
3.4. Modelo de otimização de Fujiwara e Khang (1990)	40
4.1. Fluxograma representativo da metodologia de trabalho	49
5.1. Trecho composto por três segmentos com características hidráulicas distintas	53
5.2. Caso 1 da relação entre $Q$ e $q$	58
5.3. Caso 1 da relação entre $Q$ e $q$ na inexistência de $q_B$	59
5.4. Caso 1 da relação entre $Q$ e $q$ na inexistência de $q_C$	59
5.5. Caso 2 da relação entre $Q$ e $q$	60
5.6. Caso 3 da relação entre $Q$ e $q$	61
6.1. Comportamento das funções de performance $PHN1$ , $PHN2$ e $PHN$	76
7.1. Configuração da rede de dois anéis (exemplo n.º 1)	85
7.2. Árvore de busca <i>Branch and Bound</i> na rede de dois anéis (5 primeiros nós)	94
7.3. Convergência do modelo de otimização na rede de dois anéis	96
7.4. Variação da confiabilidade em relação ao custo na rede de dois anéis	103
7.5. Evolução da confiabilidade e do custo a cada alteração na rede de dois anéis	103
7.6. Variação da relação $\Delta ICF / \Delta C$ na rede de dois anéis	104
7.7. Configuração da rede do Bessa (exemplo n.º 2)	105
7.8. Convergência do modelo de otimização na rede do Bessa	107
7.9. Configuração da rede de Apucarana (exemplo n.º 3)	112
7.10. Convergência do modelo de otimização na rede de Apucarana	117
7.11. Variação da confiabilidade em relação ao custo na rede de Apucarana	121
7.12. Evolução da confiabilidade e do custo a cada alteração na rede de Apucarana	122
7.13. Variação da relação $\Delta ICF / \Delta C$ na rede de Apucarana	122
7.14. Configuração da rede Paranoá (exemplo n.º 4)	125
7.15. Convergência do modelo de otimização na rede Paranoá	129

7.16. Variação da confiabilidade em relação ao custo na rede Paranoá	135
7.17. Evolução da confiabilidade e do custo a cada alteração na rede Paranoá	136
7.18. Variação da relação $\Delta ICF / \Delta C$ na rede Paranoá	137
7.19. Variação da confiabilidade com a evolução da demanda na rede Paranoá	138

# LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AWWA	<i>American Water Works Association</i>
CAESB	Companhia de Saneamento do Distrito Federal
DF	Distrito Federal
DLL	<i>Dynamic Link Library</i>
GRG2	<i>Generalized Reduced Gradient</i>
IBM	<i>International Business Machines</i>
LPG	<i>Linear Programming Gradient</i>
NBR	Norma Técnica Brasileira
OSL	Optimization Solution Library
PB	Paraíba
PI	Programação Inteira
PL	Programação Linear
PNL	Programação Não Linear
PR	Paraná
PR1	Problema Relaxado 1
PR2	Problema Relaxado 2

# LISTA DE SÍMBOLOS

$An$	Anel da rede
$B$	Termo independente
$B_j$	Termo independente referente à restrição $j$
$C_1$	Custo unitário do segmento de menor diâmetro
$C_2$	Custo unitário do segmento de maior diâmetro
$CF, CF_1, CF_2$	Coeficientes fixos da função objetivo
$Chw$	Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams
$Chw_1$	Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams do segmento de menor diâmetro
$Chw_2$	Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams do segmento de maior diâmetro
$Chw_k$	Coeficiente rugosidade de Hazen-Williams do segmento $k$
$Chwp_1$	Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams do primeiro segmento do trecho em paralelo
$C_k$	Custo unitário do segmento de tubulação de acordo com o diâmetro comercial $k$
$CR, CR_1, CR_2$	Coeficientes fixos das restrições
$CR_{ij}$	Coeficiente fixos da variável $i$ na restrição $j$
$CT_{final}$	Custo do trecho após a alteração do diâmetro
$CT_{inicial}$	Custo do trecho antes da alteração do diâmetro
$D$	Diâmetro da tubulação [L]
$D$	Matriz Jacobiana
$D^{-1}$	Inversa da matriz Jacobiana
$D_1$	Diâmetro do segmento de menor diâmetro [L]
$D_2$	Diâmetro do segmento de maior diâmetro [L]
$Deq$	Diâmetro equivalente do trecho duplo [L]
$dFC/dQ$	Primeira derivada de $FC$ em relação a $Q$
$Dfix$	Diâmetro do trecho fixo [L]
$D_{ij}$	Diâmetro do trecho $ij$ [L]
$D_{ijk}$	Diâmetro do segmento $k$ do trecho $ij$ [L]
$D_k$	Diâmetro do segmento $k$ [L]
$Dmax_{ij}$	Valor máximo do diâmetro do trecho [L]
$Dmin_{ij}$	Valor mínimo do diâmetro do trecho [L]
$Dp_1$	Diâmetro do primeiro segmento do trecho em paralelo [L]



$E(t)$	Expectativa de vida em função do tempo para falha $t$
$f$	Fator de atrito
$F(t)$	Função de falha
$f(t)$	Distribuição de probabilidades acumulada ou frequência do tempo de falhas
$f(X^{(m)})$	Função de $X$ na interação $m$
$\mathbf{f}(X^{(m)})$	Vetor dos valores de cada equação quando $X = X^{(m)}$
$f(X)$	Função de $X$
$f''(\mathbf{x})$	Segunda derivada de $f(\xi)$
$f'(X)$	Primeira derivada da função de $X$
$f_{An}^{(m)}$	Somatório das perdas de carga no anel $An$ na interação $m$ , calculado pela equação exponencial [L]
$FC$	Função objetivo ou custo total da rede
$FC_{ij}(x_{ijk})$	Custo do trecho $ij$ em função dos comprimentos dos segmentos $k$
$F_{ij}$	Taxa de falhas ou número de falhas por unidade de tempo no trecho $ij$
$g$	Aceleração da gravidade [ $LT^{-2}$ ]
$\mathbf{H}$	Vetor de cargas hidráulicas
$H$	Carga hidráulica [L]
$h(t)$	Função de risco
$H_{ace}$	Carga hidráulica aceitável no nó [L]
$H_i$	Carga hidráulica no nó $i$ [L]
$H_{min}$	Carga hidráulica mínima admissível nó [L]
$i$	Numeração do nó ou de variáveis
$ICF$	Índice de confiabilidade da rede
$ICF_{final}$	Índice $ICF$ da configuração obtida após a alteração do trecho
$ICF_{inicial}$	Índice $ICF$ da configuração obtida antes da alteração do trecho
$J$	Perda de carga unitária
$j$	Numeração do nó ou de restrições
$k$	Numeração do segmento de trecho de diâmetro comercial conhecido
$K$	Coefficiente de perda de carga [ $TL^{-2}$ ]
$K1$ e $K2$	Coefficientes de perda de carga dos segmentos do trecho oriundo da rede ótima [ $TL^{-2}$ ]
$Keq$	Coefficiente de perda de carga equivalente do trecho [ $TL^{-2}$ ]
$Kfix$	Coefficiente de perda de carga do trecho fixo [ $TL^{-2}$ ]
$K_{ij}$	Coefficiente de perda de carga do trecho $ij$ [ $TL^{-2}$ ]

$K'_{ij}$	Variável do trecho $ij$ que substitui o termo $K_{ij} \cdot Q_{ij}^{n-1}$ no método da linearização de equações
$K_{par}$	Coefficiente de perda de carga do trecho em projeto (em paralelo) [ $TL^{-2}$ ]
$L$	Comprimento total da tubulação ou trecho da tubulação [L]
$L_1$	Comprimento do segmento de menor diâmetro [L]
$L_2$	Comprimento do segmento de maior diâmetro [L]
$Lag$	Função Lagrangeana
$L_{ij}$	Comprimento total do trecho $ij$ [L]
$L_{par1}$	Comprimento do primeiro segmento do trecho em paralelo [L]
$L_{par2}$	Comprimento do segundo segmento do trecho em paralelo [L]
$m$	Número da iteração
$max$	Maximizar a função objetivo
$min$	Minimizar a função objetivo
$n$	Expoente da equação de perda de carga de valor entre 1,5 e 2,0
$N$	Conjunto de todos os nós da rede
$NA$	Número de anéis da rede
$ne$	Número de equações
$NK$	Número total de diâmetros possíveis por trecho
$NN$	Número de nós da rede
$nr$	Número de restrições
$NT$	Número de trechos da rede
$nv$	Número de variáveis
$p$	Pressão [ $ML^{-1}T^{-2}$ ]
$P[t < t]$	Probabilidade do tempo de falha ser menor ou igual a $t$
$P[t > t]$	Probabilidade do tempo de falha ser maior do que $t$
$P0$	Probabilidade de todos os trechos funcionarem
$p_1$	Pressão no ponto 1 a montante [ $ML^{-1}T^{-2}$ ]
$p_2$	Pressão no ponto 2 a jusante [ $ML^{-1}T^{-2}$ ]
$PF_{rs}$	Probabilidade de apenas um trecho $rs$ falhar e todos os outros funcionarem
$PGHE_{ij}$	Performance hidráulica global esperada da configuração de falha
$PHG$	Índice de performance global
$PHG_0$	Performance hidráulica global quando todos os trechos funcionam
$PHG_{rs}$	Performance hidráulica global da configuração de falha no trecho $rs$
$PHN$	Performance hidráulica nodal ou média de $PHN1$ e $PHN2$
$PHN1$	Performance hidráulica nodal em função da carga hidráulica
$PHN2$	Performance hidráulica nodal em função da vazão disponível

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$	Problema de programação linear na árvore <i>Branch and Bound</i>
$P_{ij}$	Probabilidade do trecho $ij$ funcionar ou disponibilidade do trecho $ij$
$Pop$	Disponibilidade ou probabilidade do componente estar em estado operativo
$Pop_{ijk}$	Disponibilidade ou probabilidade do segmento $k$ do trecho $ij$ estar funcionando
$P(\Delta t)$	Probabilidade da falha ocorrer no intervalo de tempo $\Delta t$
$Q$	Vazão [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{ace}$	Vazão disponível mínima aceitável para consumo [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{ij}$	Vazão no trecho $ij$ , positiva quando no sentido de $i$ para $j$ e negativa quando no sentido de $j$ para $i$ , sendo sempre $i < j$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{ij(0)}$	Vazão inicial (1ª iteração) no trecho $ij$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{ij}^{(m)}$	Vazão no trecho $ij$ na iteração $m$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{ij}(qB), Q_{ij}(qC)$	Vazão do trecho $ij$ quando a variável $q_{ij}$ é igual a $qB$ ou $qC$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{ij}'(qB), Q_{ij}'(qC)$	Primeira derivada da função $Q_{ij}(q_{ij})$ quando a variável $q_{ij}$ é igual a $qB$ ou $qC$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{ij}(q_{ij})$	Vazão do trecho $ij$ em função da variável $q_{ij}$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{max}$	Valor máximo da vazão [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{max_{ij}}$	Valor máximo da vazão no trecho $ij$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{min}$	Valor mínimo da vazão [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_{min_{ij}}$	Valor mínimo da vazão no trecho $ij$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_0$	Vazão conhecida, determinada em iteração anterior [ $L^3T^{-1}$ ]
$Q_w$	Vazão disponível para consumo no nó [ $L^3T^{-1}$ ]
$ Q_{ij} $	Módulo da vazão no trecho $ij$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$r$	Vetor dos termos $D^{-1} \cdot f(X^{(m)})$ no método Newton-Raphson
$R(t)$	Função de confiabilidade
$Re$	Número de Reynolds
$R_{ij}$	Taxa de reparos ou número de reparos por unidade de tempo no trecho $ij$
$S$	Intervalo original que restringe variáveis de decisão em intervalos
$s$	Segmento de reta utilizado para demonstrar a convexidade de funções
$S1$	Sub-intervalo resultante da divisão do intervalo $S$
$t$	Variável aleatória tempo para falha
$T$	Conjunto de todos os trechos da rede
$t$	Tempo
$TF$	Taxa de falhas ou número de falhas por unidade de tempo
$TMF$	Tempo médio entre falhas consecutivas do componente
$TMF_{ij}$	Tempo médio entre falhas consecutivas no trecho $ij$

$TMR$	Tempo médio de reparo do componente
$TMR_{ij}$	Tempo médio de reparo do trecho $ij$
$TOL1$	Tolerância no atendimento à restrição de conservação de energia
$TOL2$	Tolerância no atendimento à restrição de conservação de massa
$U$	Função objetivo do problema dual
$u_{ij}$	Variável de decisão auxiliar no modelo de otimização global quando o diâmetro do trecho $ij$ é conhecido [L]
$u_{ijk}$	Variável de decisão auxiliar no modelo de otimização global referente ao segmento $k$ do trecho $ij$ [L]
$v$	Velocidade média do escoamento [ $LT^{-1}$ ]
$v_1$	Pressão no ponto 1 a montante [ $LT^{-1}$ ]
$v_2$	Pressão no ponto 2 a jusante [ $LT^{-1}$ ]
$V_{ij}$	Função utilizada para linearizar o termo $Q_{ij}^n$
$Vmax_{ij}$	Valor máximo da função $V$ , referente à vazão máxima no trecho $ij$
$Vmin_{ij}$	Valor mínimo da função $V$ , referente à vazão máxima no trecho $ij$
$w$	Restrição em um problema de otimização qualquer
$W$	Consumo ou injeção nodal [ $L^3T^{-1}$ ]
$w(X_1, X_2)$	Restrição em função das variáveis de decisão $X_1$ e $X_2$
$W_i$	Consumo, quando negativo, ou injeção, quando positivo, de vazão no nó $i$ [ $L^3T^{-1}$ ]
$X$	Variável qualquer ou variável de decisão
$\mathbf{x}$	Vetor das variáveis $X$
$X^{(m)}$	Valor da variável $X$ na iteração $m$
$\mathbf{x}^{(m)}$	Vetor das variáveis $X$ na iteração $m$
$X_1, X_2$	Variáveis quaisquer ou variáveis de decisão
$X_i$	Variável de decisão $i$ no problema de otimização
$x_{ijk}$	Comprimento do segmento $k$ de trecho $ij$ [L]
$y_{ij}$	Variável de decisão auxiliar no modelo de otimização global quando o diâmetro do trecho $ij$ é conhecido [L]
$y_{ijk}$	Variável de decisão auxiliar no modelo de otimização global referente ao segmento $k$ do trecho $ij$ [L]
$z$	Carga potencial em relação a um plano horizontal de referência [L]
$Z$	Função objetivo do problema primal
$Z(S)_{dual}$	Solução do problema dual no intervalo $S$
$Z(S)_{primal}$	Solução do problema primal no intervalo $S$
$Z(X_1, X_2)$	Função objetivo com $X_1$ e $X_2$ como variáveis de decisão

$z_{max_i}$	Cota piezométrica máxima [L]
$z_{min_i}$	Cota piezométrica mínima [L]
$Z^*$	Valor ótimo da função objetivo em um problema de otimização qualquer
$Z^+$	Conjunto dos números inteiros positivos
$z_1$	Carga potencial em relação a um plano horizontal de referência, no ponto 1 a montante [L]
$z_2$	Carga potencial em relação a um plano horizontal de referência, no ponto 2 a jusante [L]
$z_i$	Carga potencial em relação a um plano horizontal de referência no nó $i$ [L]
$a_1$	Coeficiente de resistência do segmento de menor diâmetro
$a_2$	Coeficiente de resistência do segmento de maior diâmetro
$a_{ij}$	Coeficiente de resistência do trecho $ij$ quando o diâmetro é conhecido
$a_{ijk}$	Coeficiente de resistência do segmento $k$ do trecho $ij$
$a_k$	Coeficiente de resistência do segmento $k$
$ap_1$	Coeficiente de resistência do primeiro segmento do trecho em paralelo
$ap_2$	Coeficiente de resistência do segundo segmento do trecho em paralelo
$\Delta CC_{atual}$	Relação atual na alteração de diâmetros entre as variações de confiabilidade e custo obtidas pela alteração do trecho
$\Delta CC_{ij}$	Relação entre as variações de confiabilidade e custo obtidas pela alteração do trecho
$\Delta C_{ij}$	Variação do custo total da rede decorrente da alteração do diâmetro no trecho $ij$
$\Delta H$	Perda de carga [L]
$\Delta H1_{ij}$	Perda de carga no trecho $ij$ dada pela equação de perda de carga [L]
$\Delta H_{12}$	Perda de carga entre os pontos 1 e 2 [L]
$\Delta H2_{ij}$	Perda de carga no trecho $ij$ dada pela diferença de cotas piezométricas [L]
$\Delta H_{ij}$	Perda de carga no trecho $ij$ [L]
$\Delta H_{ij}(Q_{ij}, D_{ij})$	Perda de carga no trecho $ij$ em função da vazão e do diâmetro [L]
$\Delta H_{ij}(Q_{ij}, x_{jk})$	Perda de carga no trecho $ij$ em função da vazão e dos comprimentos dos segmentos $k$ [L]
$\Delta H_o$	Perda de carga original do trecho, antes da unificação de diâmetros [L]
$\Delta H_u$	Perda de carga final do trecho, após a unificação de diâmetros [L]
$\Delta ICF_{ij}$	Variação do índice de confiabilidade decorrente da alteração do trecho $ij$
$d_{ij}$	Diferença absoluta entre $\Delta H1$ e $\Delta H2$ [L]

$\Delta K_a$	Acréscimo no coeficiente de perda de carga decorrente o aumento de diâmetro $[TL^{-2}]$
$\Delta K_u$	Acréscimo no coeficiente de perda de carga decorrente da unificação de diâmetros $[TL^{-2}]$
$\Delta Q$	Resíduo de vazão no método de Hardy-Cross $[L^3T^{-1}]$
<b>DQ</b>	Vetor de resíduos de vazão no método de Hardy-Cross $[L^3T^{-1}]$
$\Delta Q_{An}$	Resíduo de vazão no método de Hardy-Cross referente ao anel $An$ $[L^3T^{-1}]$
$\Delta Q_{An}^{(m)}$	Resíduo de vazão no método de Hardy-Cross referente ao anel $An$ na iteração $m$ $[L^3T^{-1}]$
$\Delta t$	Intervalo de tempo
$e$	Rugosidade absoluta $[L]$
$f$	Variável de valor entre 0 e 1, utilizada na demonstração da convexidade de funções
$g$	Peso específico do fluido $[ML^{-2} T^{-2}]$
$I_j$	Multiplicador de Lagrange da restrição $j$
$m$	Viscosidade dinâmica do fluido $[ML^{-1} T^{-1}]$
$q_B$	Valor de $q$ no ponto de tangência da reta suporte superior – caso 1
$q_C$	Valor de $q$ no ponto de tangência da reta suporte inferior – caso 1
$q_{ij}$	Variável de valor entre 0 e 1, em função da vazão, referente a cada trecho
$r$	Massa específica do fluido $[ML^{-3}]$
$t$	Variável de integração
$x$	Erro residual na estimativa de $f(X)$

# 1. INTRODUÇÃO

O abastecimento de água, em condições satisfatórias, é uma das condições essenciais para o desenvolvimento humano. Além das necessidades vitais diárias, o fornecimento de água deve satisfazer exigências humanas nos aspectos sociais e econômicos. Tendo em vista a sua estreita ligação com a manutenção da saúde, enquanto bem estar físico, mental e social, a disponibilidade de água em quantidade e qualidade adequadas constitui fator básico e necessário à qualidade de vida. Na esfera econômica, a água aparece como elemento fundamental para o desenvolvimento de atividades industriais, agrícolas e comerciais, sendo obrigatório o seu fornecimento em condições adequadas.

Fatores como a urbanização e a degradação de mananciais próximos às cidades conduzem à necessidade de implantação de sistemas públicos de abastecimento, pois o suprimento particular depara em sérios entraves, como a obtenção de água potável e o controle higiênico sanitário do processo de abastecimento (Azevedo Netto *et al.*, 1973). Esses sistemas têm por objetivo principal garantir o adequado fornecimento de água, em termos de qualidade e quantidade, à toda a população, de forma econômica, racional e igualitária.

O sistema convencional de abastecimento de água é composto pelas unidades de captação, adução, tratamento, reservação e distribuição, dispostas conforme a configuração adotada e características físicas da cidade. Contudo, a distribuição constitui, sempre, a unidade final que conduz a água aos pontos de consumo, exercendo papel fundamental na manutenção da saúde pública e no combate a incêndios.

A implantação de sistemas de abastecimento deve seguir as fases de planejamento, projeto, execução e operação, sendo os maiores custos associados às fases de execução e operação. Os custos de execução das redes de distribuição representam de 40% a 60% do custo total de execução do sistema e os custos de toda a fase projeto correspondem a 4% dos custos totais de execução do sistema de abastecimento (Mascaró, 1987). Portanto, a execução das redes representa um grande ônus financeiro em relação ao sistema como um todo, em todas as suas fases. Aprimoramentos nas técnicas de dimensionamento de redes de distribuição podem constituir uma forma eficiente de se reduzir gastos, particularmente no Brasil, onde 1.438 municípios não dispõem de sistemas de abastecimento e, em sua maioria, encontram-se em precárias condições financeiras (SINIS, 1999).

O projeto de redes de distribuição é um processo complexo devido ao comportamento da demanda, às características hidráulicas do problema e a limitações computacionais. A vazão de demanda de água apresenta variações diárias e mensais, além das variações

associadas às características dos consumidores. Essas variações alteram o comportamento hidráulico das redes, tornando necessário o estabelecimento de padrões mínimos de qualidade, como pressões mínimas e máximas, para que o abastecimento seja adequado. Diversas são as configurações de redes que podem atender a esses limites, constituindo diversas soluções possíveis. A escolha da melhor solução possível que atende às condições impostas torna-se ainda mais difícil em termos computacionais devido à não linearidade de algumas equações que descrevem o comportamento hidráulico das redes.

Ao longo das últimas três décadas, diversas técnicas tem sido estudadas visando o dimensionamento ótimo de redes de distribuição. No entanto, ainda que soluções tenham sido encontradas para o caso das redes ramificadas, não é possível resolver o problema geral do projeto ótimo, com toda a sua complexidade, no caso de redes malhadas (Eiger *et al.*, 1994).

Em paralelo com pesquisas sobre otimização do dimensionamento de redes, esforços foram despendidos com vistas à quantificação da confiabilidade da rede, visto que esse parâmetro é uma limitação à redução do custo do sistema. A medida de confiabilidade estaria associada ao grau de redundância da rede e seria avaliada pela análise de sua performance sob diversas situações de demanda. De modo geral, redes ramificadas seriam de baixa confiabilidade e custo enquanto redes malhadas seriam de alta confiabilidade e custo.

O presente trabalho visa o estudo e implementação de modelos de otimização com essas características. Para tanto, modificações e adaptações são promovidas em algoritmos existentes na literatura, incorporando aspectos do projeto de redes brasileiras. Aplicações a casos hipotéticos e reais serão realizadas para a verificação do modelo desenvolvido.

O trabalho está organizado em 8 capítulos. O primeiro capítulo é introdutório e tenta inserir o problema da otimização no contexto do abastecimento de água e apresenta os objetivos do trabalho. No segundo capítulo, são apresentados fundamentos teóricos em que se baseia a pesquisa, compreendendo tópicos de análise, modelagem e otimização de redes de distribuição de água, métodos de otimização matemática e conceitos de confiabilidade. No terceiro capítulo são revisados os principais estudos desenvolvidos sobre otimização do dimensionamento e análise da confiabilidade. No quarto capítulo é apresentada a metodologia geral da pesquisa, definindo etapas e recursos necessários. No quinto capítulo são apresentados o modelo de otimização e suas adaptações. No sexto capítulo o modelo de análise de confiabilidade é apresentado. No sétimo capítulo são apresentadas as aplicações do modelos. As conclusões e recomendações do trabalho são apresentadas no oitavo e último capítulo.



## 1.1. OBJETIVOS

Os objetivos gerais da pesquisa é implementar algoritmos eficientes de otimização que minimizem os custos das redes de distribuição de água e avaliar os resultados em termos de confiabilidade do sistema. Os objetivos específicos podem ser citados da seguinte forma:

1. Estudar os algoritmos existentes e selecionar aquele mais eficiente e flexível quanto a possibilidade de modificações;
2. Desenvolver e utilizar métodos que possam avaliar o sistema sob situações críticas e quantificar sua performance em termos de índices de confiabilidade;
3. Incorporar as condições típicas brasileiras aos modelos;
4. Avaliar a relação custo x confiabilidade e fatores que contribuem para a redução da confiabilidade das redes, como o processo de envelhecimento.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, serão apresentados os fundamentos teóricos do escoamento, análise, modelagem e otimização de redes de distribuição de água.

### 2.1. ESCOAMENTO EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO

Sob a ótica do escoamento em condutos forçados, o escoamento nas tubulações que compõem redes de distribuição de água pode ser classificado como sob pressão, já que a pressão reinante é diferente da atmosférica; não uniforme, devido às variações de diâmetros; e incompressível, já que a massa específica da água não varia de modo significativo. Para fins de projeto, o escoamento pode ser considerado permanente, não havendo variações em suas propriedades ao longo do tempo, ainda que em situações operativas o escoamento seja transiente.

Nas redes de distribuição, o escoamento é classificado, ainda, como viscoso, existindo uma tensão de cisalhamento nas paredes da tubulação (figura 2.1); e como turbulento, caracterizado por movimentos aleatórios e tridimensionais das partículas fluidas, adicionados ao movimento principal. A tensão de cisalhamento é responsável pela força de atrito que transforma a energia mecânica em energia térmica ao longo da tubulação, de forma irreversível. A queda de energia mecânica é denominada perda de carga e pode ser analisada pela equação da energia formulada para escoamentos viscosos incompressíveis em regime permanente, equação 2.1 (extraída de Porto, 1999), referente à figura 2.1.

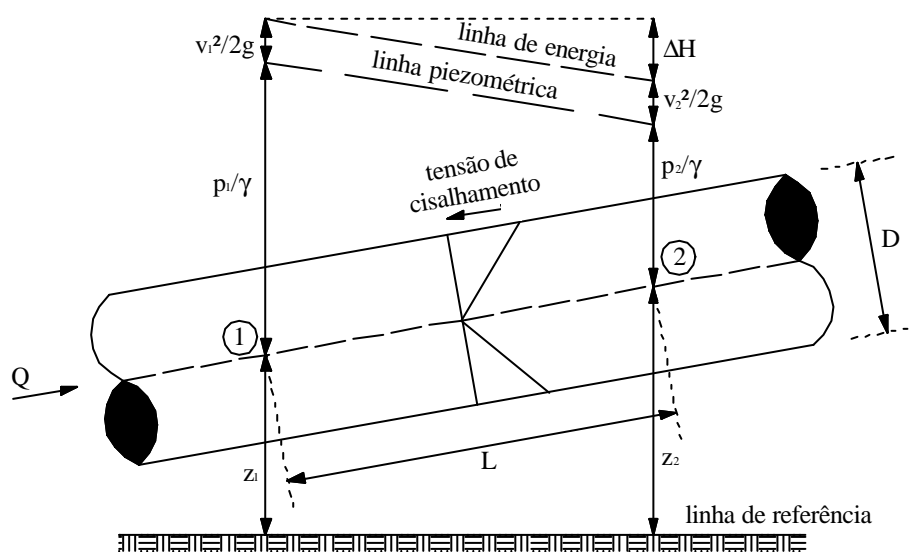


Figura 2.1 – Representação da distribuição de tensões e perda de carga em tubulações.

$$\frac{p_1}{\mathbf{g}} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\mathbf{g}} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{12} \quad (2.1)$$

em que:

$p$  : pressão [ $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ ];

$\mathbf{g}$  : peso específico do fluido [ $\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}$ ];

$z$  : carga potencial em relação a um plano horizontal de referência [L];

$v$  : velocidade média do escoamento [ $\text{LT}^{-1}$ ];

$g$  : aceleração da gravidade [ $\text{LT}^{-2}$ ];

$p/\mathbf{g}$  : carga ou energia de pressão [L];

$v^2/2g$  : carga ou energia cinética [L];

$\Delta H_{12}$  : perda de carga entre os pontos 1 e 2 [L];

Da análise dimensional dos parâmetros resulta a fórmula universal da perda de carga ou equação de Darcy-Weisbach (equação 2.2).

$$\Delta H_{12} = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,0827 \frac{f \cdot L \cdot Q^2}{D^5} \quad (2.2)$$

em que:

$f$  : fator de atrito;

$L$  : comprimento da tubulação ou trecho de tubulação [L];

$D$  : diâmetro da tubulação [L];

$Q$  : vazão [ $\text{L}^3\text{T}^{-1}$ ].

Enquanto que no escoamento laminar a perda de carga pode ser deduzida analiticamente, no escoamento turbulento não há uma relação simples entre tensões de cisalhamento e velocidade média e a análise é apoiada em teorias semi-empíricas e dados experimentais. A extensão de experimentos realizados em tubos de rugosidade controlada para tubulações comerciais resultou na equação de Colebrook-White (equação 2.3).

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\mathbf{e}}{3,71D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad \text{válida para: } 14,14 \leq \frac{\text{Re} \sqrt{f}}{D/\mathbf{e}} \leq 198 \quad (2.3)$$

Em que:  $Re$  :  $r.v.D / \mu$  = número de Reynolds;

$r$  : massa específica do fluido [ $\text{ML}^{-3}$ ];

$m$  : viscosidade dinâmica do fluido [ $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$ ];

$\mathbf{e}$  : rugosidade absoluta [L].

Visando reduzir dificuldades no uso da equação 2.3, fórmulas explícitas têm sido apresentadas, como a de Swamee-Jain (Swamee e Jain, 1976, *apud* Porto, 1999) e de Shacham (Koide, 1998), descritas pelas equações 2.4a e 2.4b, respectivamente. Segundo (Koide, 1998), a equação de Shacham (2.4b) é a que produz resultados mais próximos da equação de Colebrook-White.

$$f = \frac{0,25}{\left[ \log \left( \frac{e}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad \text{válida para: } \begin{matrix} 10^{-6} \leq e/D \leq 10^{-2} \\ 5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^8 \end{matrix} \quad (2.4a)$$

$$f = \left\{ -2 \log \left[ \frac{e}{3,7D} - \frac{5,02}{Re} \log \left( \frac{e}{3,7D} + \frac{14,5}{Re} \right) \right] \right\}^{-2} \quad (2.4b)$$

Para o cálculo prático da perda de carga em tubulações comerciais, fórmulas empíricas foram desenvolvidas em função de características da tubulação e do escoamento. Agrupando termos na variável  $K$ , a perda de carga pode ser formulada de acordo com a equação exponencial 2.5 (Jeppson, 1979). A fórmula de Hazen-Williams (eq. 2.6) segue essas formulações e é uma das equações mais utilizadas na prática, apesar de existirem restrições quanto ao regime de escoamento, diâmetro e fator de atrito.

$$\Delta H = K \cdot Q^n \quad (2.5)$$

$$J = 10,66 \frac{Q^{1,852}}{C_{hw}^{1,852} D^{4,87}} \quad (2.6)$$

em que:

$n$  : expoente da equação de perda de carga, geralmente de valor entre 1,5 e 2,0;

$J$  : perda de carga unitária;

$K$  : coeficiente de perda de carga [ $TL^{-2}$ ];

$C_{hw}$  : coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams.

## 2.2. ANÁLISE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA

Os principais objetivos da análise de redes de distribuição são verificar a adequação dos componentes, identificar deficiências do sistema e elaborar melhoramentos necessários (AWWA, 1989). No entanto, aspectos do processo de análise podem ser utilizados no projeto de novas redes ou de expansões de sistemas existentes (Shamir, 1973).

### 2.2.1. Redes de Distribuição

Redes de distribuição de água são compostas por elementos hidráulicos interconectados como tubulações, bombas, válvulas e reservatórios que, no processo de análise, são representados por trechos conectados por nós (fig. 2.2). As variáveis a serem determinadas na fase de projeto são as cargas hidráulicas e consumos dos nós e as vazões e diâmetros dos trechos.

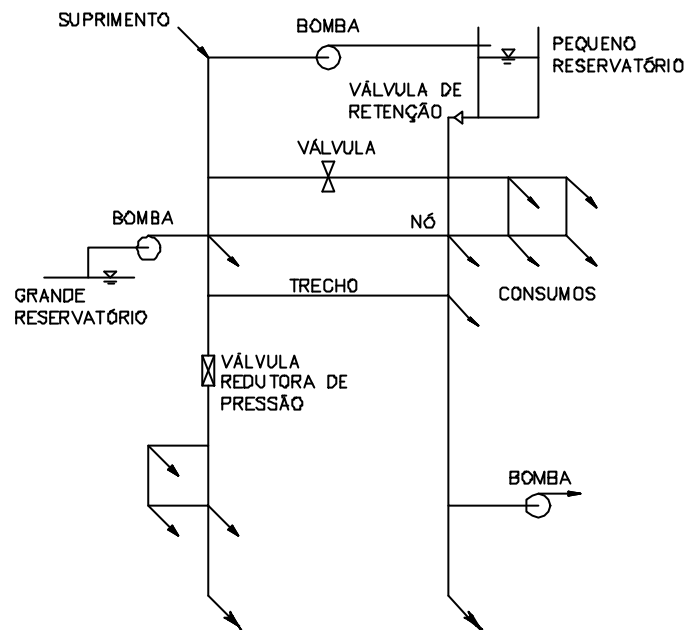


Figura 2.2 – Representação de uma rede de distribuição por trechos conectados por nós.

Cada elemento hidráulico é associado a uma lei física que descreve o seu comportamento. Nas tubulações, o escoamento se dá sob pressão, sendo uniforme em cada trecho. Para fins de projeto, o escoamento pode ser considerado permanente e incompressível.

As bombas aumentam a carga hidráulica em trechos da rede e são normalmente descritas por curvas que relacionam a vazão e o acréscimo de carga hidráulica, geralmente fornecidas pelo fabricante. Nas bombas de velocidade fixa, a vazão é reduzida pela ação de uma válvula que aumenta a resistência ao escoamento, enquanto que nas bombas de velocidade variável a redução de velocidade do rotor diminui a vazão sem aumento da resistência.

Diversos são os tipos válvulas existentes. As válvulas controladoras de pressão são projetadas para manter constantes as pressões a jusante do seu ponto de instalação. As válvulas de retenção permitem o fluxo de água em apenas uma direção e são utilizadas nas saídas de reservatórios, por exemplo. Válvulas chamadas ventosas são instaladas em pontos altos da rede, onde ocorre aprisionamento de ar durante o enchimento. Existem,

ainda, diversos tipos de registros, como de gaveta, globo e descarga, utilizados para interrupção do fluxo em determinados trechos.

Os reservatórios são projetados para armazenar água, suprir variações diárias de demanda, combater incêndios e situações de emergência e prover pressões adequadas na rede. São apoiados, quando há locais com cota elevada, ou elevados, exigindo a instalação de bombas. O nível d'água pode ser considerado constante se as dimensões do reservatório são grandes, o que não ocorre no caso de pequenos reservatórios (Shamir, 1973).

Segundo a AWWA (1989), a análise de redes existentes pode ser efetuada a partir da construção de um modelo computacional de descrição dos componentes, simulação sob determinadas situações e otimização visando a redução de custos (fig. 2.3). Alguns conceitos relacionados a essas fases são importantes no projeto de novas redes.

### 2.2.2. Elaboração do Modelo Computacional

Os modelos que descrevem as redes de distribuição variam com o seu grau de agregação e simplificação. A agregação ocorre quando os consumos distribuídos ao longo de um trecho são concentrados nos nós ou quando dois ou mais trechos são considerados como um trecho "equivalente". A simplificação se dá quando elementos menos importantes são desconsiderados da análise ou quando a área é subdividida em zonas de pressão.

Com isso os modelos podem ser do tipo caixa preta, branca ou cinza, de acordo com o nível de agregação e simplificação (Shamir, 1973). No tipo caixa preta, a demanda e o suprimento são considerados como nós únicos; no tipo caixa branca todos os componentes da rede são representados. Os modelos mais adequados são do tipo caixa cinza, em que os graus de agregação e simplificação dependerão dos objetivos da análise e do balanço entre eficiência computacional e acurácia dos resultados. Por exemplo, a tabela 2.1 mostra quais trechos devem ser representados de acordo com o resultado pretendido.

Tabela 2.1 – Trechos a serem simulados segundo os objetivos.

<b>Tipo de trecho</b>	<b>Recomendação / consequência no esquema</b>	<b>Diâmetro (mm)</b>
Trechos principais	Sempre representados	≥ 400
Trechos secundários	Avaliação da vazão/pressão em certas áreas	250 a 300
Pequenos trechos	Avaliação de problemas específicos	150 a 200
Trechos muito pequenos	Grande sensibilidade / criação de falso indicador	< 150

Fonte: AWWA (1989).

Como mostra a fig. 2.3, o primeiro passo na construção do modelo computacional é a definição dos objetivos, que estão relacionados com a definição de regras operacionais ou dimensionamento de novas redes. Os objetivos definem o tipo de modelo, o nível de agregação e simplificação e os dados a serem obtidos.

Para análise de sistemas existentes, o modelo deve contar com uma descrição detalhada da rede, obtida na fase de coleta de dados, por levantamentos de campo e secundários. O chamado modelo base é constituído por dados físicos do sistema e pelo programa computacional, que prevê o comportamento da rede usando operações matemáticas.

No dimensionamento das tubulações, os reservatórios podem ser considerados com características conhecidas, devendo-se definir capacidades, faixas de operação, áreas de serviço e relações vazão x volume x nível d'água.

A caracterização da demanda também é importante porque varia espacial e temporalmente. Para a alocação espacial, podem ser usados dados de tarifas de água, população servida, medições de consumo, principais consumidores e consumo per capita. A variação do consumo de água com o tempo se altera para diferentes áreas, recomendando-se o agrupamento de padrões de consumo em áreas homogêneas e categorias de consumidores, como residenciais, comerciais, industriais e institucionais.

Na análise de redes existentes, a fase de calibração é importante para confirmação da precisão do modelo e dos parâmetros. Para isso, dados de campo são coletados em situações reais de operação e comparados com resultados fornecidos pelo modelo. Isso também é feito para verificar previsões de comportamento assumidas na fase de projeto.

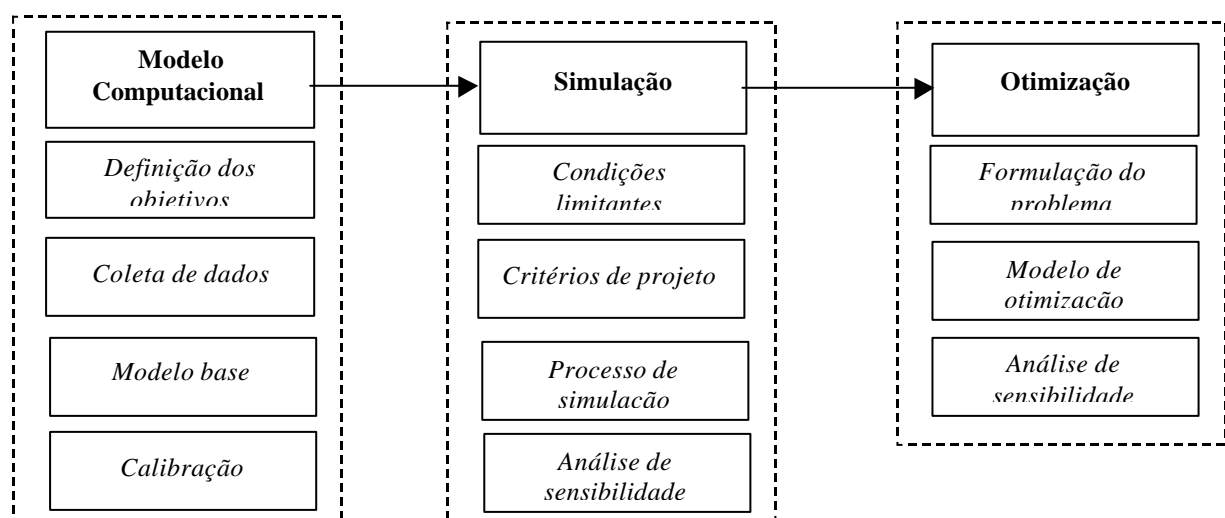


Figura 2.3 – Processo de análise de redes de distribuição.

### 2.2.3. Simulação do Sistema de Distribuição

No processo de simulação da rede, o modelo é utilizado para avaliar condições limites de demanda, existentes ou projetadas. Para isso, as condições limitantes a serem analisadas devem ser identificadas, critérios de projeto devem ser definidos com vistas à comparação de resultados e o processo de simulação deve ser estabelecido.

No caso do regime permanente, as condições limites para cada componente (tab. 2.2) podem ser referentes ao consumo médio no dia de demanda média, ao consumo médio do dia de demanda máxima (dia de maior consumo), ao consumo máximo do dia de demanda máxima (hora de maior consumo), à demanda máxima de enchimento dos reservatórios ou às demandas de combate a incêndio. Idealmente, o sistema deve ter capacidade de suprimento constante de água a uma taxa igual ao consumo médio do dia de maior demanda, cuja variação durante esse dia é suprida por reservatórios. A demanda de enchimento dos reservatórios atinge o seu máximo quando a demanda no sistema é mínima, o que ocorre, normalmente, à noite. Quando a demanda no sistema é máxima (hora de maior consumo), a taxa de esvaziamento dos reservatórios atinge o seu máximo.

Tabela 2.2 – Condições limitantes de demanda de acordo com os componentes.

<b>Componente avaliado</b>	<b>Condição de demanda</b>
Tubulações	Dia de maior consumo + demanda de combate a incêndio
	Demanda máxima de enchimento do reservatório
	Hora de maior consumo
Reservatório	Hora de maior consumo
	Dia de maior consumo + demanda de combate a incêndio
Bombas	Dia de maior consumo
	Dia de maior consumo + demanda de combate a incêndio
	Hora de maior consumo

Fonte: AWWA (1989).

Outras situações críticas de abastecimento que devem ser simuladas na fase de projeto são as demandas de combate a incêndios e as demandas de emergência. As demandas de combate a incêndios podem ser simuladas durante o esvaziamento dos reservatórios, adicionando-as à demanda média do dia de maior consumo. Como situações de emergência, podem ser simulados o rompimento de tubulações principais e quedas de energia durante condições críticas de demanda. Essas simulações visam a identificação de partes vulneráveis do sistema pela investigação de sua performance sob cenários críticos, associados a uma frequência de ocorrência e a um custo devido aos danos causados.



O grau de confiabilidade do sistema está relacionado com a sua performance em cada situação crítica. Assim, as simulações poderão auxiliar no levantamento de custos necessários para o aprimoramento do sistema e melhoria das condições de confiabilidade.

Os critérios de projeto especificam requisitos de performance dos componentes e constituem padrões de comparação nas simulações do sistema. Por exemplo, deficiências são detectadas quando pressões inadequadas são identificadas pelo modelo, como no caso de pressões negativas nos nós, que indicam que as demandas não estão sendo supridas.

Cada componente possui comportamentos esperados, de acordo como os critérios de projeto. Para as tubulações, são definidas vazões e pressões máximas e mínimas para atender à capacidade estrutural do material e evitar deposição de substâncias presentes na água. Esses requisitos também devem ser observados na instalação das bombas, observando-se, ainda, suas faixas de operação mais econômicas energeticamente.

Os reservatórios são avaliados segundo requisitos de armazenamento, tipo e localização. Como requisitos de armazenamento, os reservatórios devem possuir volumes para atender às variações diárias de demanda (equalização<sup>1</sup>), combater incêndios<sup>2</sup> e amenizar situações de emergência<sup>3</sup>. Enquanto reservatórios elevados possuem requisitos de altura máxima, os apoiados devem ser alocados de modo a manter pressões adequadas na rede. Os reservatórios devem ser localizados de forma conveniente para facilitar a operação do sistema e atender requisitos de pressão mínima.

O processo de simulação engloba a análise de todas as configurações de demanda do sistema (tab. 2.2), simuladas de forma independente. Cada configuração pode ser simulada segundo diferentes condições iniciais do sistema, como a de reservatório inicialmente cheio ou vazio. A rede pode ser simulada por um período em que o consumo varia de forma padronizada, considerando-se o regime permanente em cada intervalo de tempo. Essa técnica é conhecida como simulação estendida (Shamir, 1973).

Na avaliação dos resultados da simulação devem ser verificadas a velocidade e perda de carga nas tubulações, o nível d'água nos reservatórios e vazões e pressões nas bombas. Uma análise de sensibilidade pode ser promovida para avaliar a resposta do sistema a variações nos valores de parâmetros, como as modificações apresentadas na tab. 2.3.

---

<sup>1</sup> A equalização é função da capacidade da rede e bombas; se esses componentes possuem grandes capacidades, a necessidade de equalização é menor e vice-versa.

<sup>2</sup> O volume de combate a incêndios é função dos riscos existentes na área servida.

<sup>3</sup> O volume de emergência é função da frequência de ocorrência e magnitude de situações críticas.

Tabela 2.3 – Parâmetros para a análise de sensibilidade (Fonte: AWWA, 1989)

<b>Modificação</b>	<b>Faixa de variação</b>
Aumento da rugosidade da tubulação	10% a 20%
Redução da rugosidade da tubulação	10% a 20%
Aumento das condições limitantes de demanda	15% a 25%
Locação de novos pontos de demanda	-

#### **2.2.4. Otimização de redes de distribuição**

A otimização é um procedimento matemático no qual são determinados os valores das variáveis de projeto que tornam o projeto ótimo em termos de um objetivo definido, como custos de implantação ou confiabilidade do sistema (Shamir, 1973). Nesse sentido, o processo de simulação pode ser usado para verificar conjuntos de valores das variáveis de projeto, na busca da solução ótima. Isso é particularmente importante devido à complexidade dos modelos de otimização que, por sua vez, tem origem na complexidade dos sistemas de distribuição. Devido às complexidades envolvidas, como o comportamento hidráulico das redes e as incertezas em relação aos parâmetros de projeto, futuras demandas e requisitos de qualidade dos serviços, esses modelos encontram dificuldades na otimização de sistemas reais, o que compromete a sua aplicação prática (AWWA, 1989).

### **2.3. MODELAGEM HIDRÁULICA DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA**

A modelagem hidráulica das redes de água procura simular o seu comportamento sob determinadas condições de demanda. Convencionalmente, a modelagem é efetuada pelo cálculo da rede, ou seja, a determinação de vazões e pressões a partir do conhecimento da configuração física. No entanto, existem métodos de cálculo em que qualquer variável de projeto pode ser determinada, como consumos e diâmetros (Shamir, 1973). Esse cálculo é desenvolvido com base nas leis da conservação da massa e da conservação da energia.

#### **2.3.1 Formulações matemáticas**

De acordo com Shamir (1973) e Walski *et al.* (1990), as equações utilizadas no cálculo de redes podem ser referentes a nós, anéis e trechos de rede. As equações nodais (eq. 2.8) são oriundas da aplicação da lei de conservação de massa aos nós da rede. As equações de anéis (eq. 2.9) e de trechos descrevem a conservação da energia ao longo dos trechos dos anéis fechados e caminhos de trechos sucessivos, respectivamente.

Basicamente, existem três formulações matemáticas que resolvem o problema a partir da aplicação dessas leis. Tendo em vista que as vazões nos trechos ( $Q_{ij}$ ) podem ser

equacionadas em função da diferença de pressão entre os nós de montante e de jusante ( $H_i - H_j$ ), as incógnitas do sistema de equações podem ser as vazões nos trechos (método das vazões) ou as cargas nos nós (método nodal). A terceira formulação estabelece como incógnita uma parcela de vazão  $\Delta Q$  a ser somada ou subtraída de vazões pré-fixadas nos trechos e devidamente equilibradas em termos do balanço de massa, de modo a obedecer a lei da conservação da energia. A aplicação dessas formulações conduz a sistemas de equações que podem ser resolvidos pelos métodos de linearização de equações, Newton-Raphson e de Hardy Cross. Vieira (1980) procedeu a uma comparação entre essas formulações e concluiu que a melhor seria a formulação nodal (cargas como variáveis) resolvida pelo método de Newton-Raphson.

### Método das vazões

Nessa formulação do problema, o sistema de equações tem as vazões nos trechos como incógnitas. Como em qualquer rede plana é válida a relação da eq. 2.7 (Jeppson, 1979), são necessárias  $(NN + NA - 1)$  equações, pois o número de incógnitas é igual ao de trechos.

$$NT = NN - 1 + NA \quad (2.7)$$

em que:

$NT$  : número de trechos da rede;

$NN$  : número de nós da rede;

$NA$  : número de anéis da rede.

A aplicação da equação da continuidade a cada nó resulta na eq. 2.8, estabelecendo que o balanço de massa (vazão líquida) em cada nó deve ser nulo (Jeppson, 1979). Se as variáveis  $W_i$  são conhecidas,  $(NN - 1)$  equações lineares independentes são formuladas.

$$\left( \sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ij} \right) - \left( \sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ji} \right) = W_i \quad (2.8)$$

em que:

$i$  : numeração do nó em que é feito o balanço de massa;

$j$  : numeração dos nós adjacentes ao nó  $i$ ;

$Q_{ij}$  : vazão do trecho  $ij$ , positiva quando no sentido de  $i$  para  $j$  e negativa quando no sentido de  $j$  para  $i$ , sendo sempre  $i < j$  [ $M^3T^{-1}$ ];

$T$  : conjunto de todos os trechos da rede;

$W_i$  : consumo, quando negativo, ou injeção, quando positivo, de vazão no nó  $i$  [ $M^3T^{-1}$ ].

A aplicação da lei da conservação da energia, a cada anel, resulta na eq. 2.9 (Jeppson, 1979), que postula que o balanço da perda de carga nos trechos de cada anel fechado deve ser nulo. Visto que a perda de carga em um trecho pode ser formulada por uma equação exponencial em função da vazão (eq. 2.6), as outras  $NA$  equações são obtidas.

$$\sum_{(i,j) \in An} \Delta H_{ij} = 0 \Rightarrow \sum_{(i,j) \in An} K_{ij} \cdot Q_{ij}^n = 0 \quad (2.9)$$

em que:

$An$  : anel da rede;

$K_{ij}$  : coeficiente de perda de carga do trecho  $ij$  [ $TL^{-2}$ ].

$\Delta H_{ij}$  : perda de carga no trecho  $ij$  [L].

Devem ser conhecidos os diâmetros, rugosidades, comprimentos e os parâmetros necessários ao cômputo dos fatores  $K_{ij}$  e  $n$  dos trechos, além das vazões consumidas ou supridas nos nós. Como as equações dos anéis (eq. 2.9) são não lineares, métodos como o da linearização e de Newton-Raphson devem ser empregados, como será apresentado. Uma vez obtidas as vazões, as perdas de carga podem ser calculadas pela eq. 2.6 e, definindo-se a pressão em um dos nós, é possível a sua determinação em todos os outros.

### Método nodal

A formulação é feita de modo a se obter as cargas nos nós como incógnitas. Portanto, o número de incógnitas é reduzido para  $NN$ , o número de nós. Para a obtenção das cargas, é utilizada apenas a equação da continuidade aplicada aos nós (eq. 2.8). Partindo-se de uma relação que expresse a perda de carga em um trecho em função da vazão, é possível a obtenção de uma equação que expresse a vazão em função da perda de carga. Utilizando-se a relação exponencial (eq. 2.6):

$$\Delta H_{ij} = K_{ij} \cdot Q_{ij}^{1,852} \Rightarrow Q_{ij} = \left( \frac{\Delta H_{ij}}{K_{ij}} \right)^{\frac{1}{n}} = \left( \frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.10)$$

em que:

$H_i$  : carga hidráulica do nó  $i$  [L].

A eq. 2.10, substituída na eq. 2.8, resulta na eq. 2.11, formulada para cada nó da rede. Entretanto, conhecidos os consumos  $W_i$ , apenas  $(NN - 1)$  equações independentes não lineares são obtidas, fazendo com que a carga em um dos nós tenha que ser conhecida.

$$\left[ \sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} \left( \frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{\frac{1}{n}} \right] - \left[ \sum_{j=1, (i,j) \notin T}^{NN} \left( \frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{\frac{1}{n}} \right] = W_i \quad (2.11)$$

Da mesma forma que na formulação anterior, os parâmetros necessários ao cômputo dos fatores  $K$  e  $n$  dos trechos e os consumos  $W_i$  devem ser conhecidos. Resolvendo-se o sistema formado pela eq. 2.11 aplicada a cada nó, as cargas  $H_i$  são obtidas. Como todas as equações são não-lineares, o método de Newton-Raphson é o mais indicado para a sua resolução. Determinadas as cargas, as perdas de carga e vazões podem ser encontradas pela aplicação da eq. 2.6 (Jeppson, 1979).

### Método DQ

O método estabelece como incógnitas parcelas  $\Delta Q$  de vazão a serem somadas ou subtraídas de uma distribuição pré-estabelecida de vazões em um anel. Essa distribuição inicial de vazões é feita de modo a obedecer a lei da conservação de massa nos nós. Porém, a lei da conservação da energia nos anéis não é obedecida. As incógnitas  $\Delta Q$  são, então, determinadas de forma que, quando adicionadas ou subtraídas das vazões de cada trecho, a lei da conservação da energia é satisfeita. Como existe apenas uma incógnita  $\Delta Q$  por anel, o número de incógnitas do problema passa a ser  $NA$ , o número de anéis. O sinal da parcela, indicando se ela será somada ou subtraída das vazões dos trechos do anel, dependerá do sentido assumido, por convenção, em cada anel. A perda de carga em cada trecho será dada pela eq. 2.12, que aplicada a um anel resulta na eq. 2.13. A aplicação da eq. 2.13 a todos os anéis da rede resulta em um sistema de  $NA$  equações.

$$\Delta H_{ij} = K_{ij} \cdot (Q_{ij(0)} + \Delta Q_{An})^n \quad (2.12)$$

$$\sum_{(i,j) \in An} K_{ij} \cdot (Q_{ij(0)} + \Delta Q_{An})^n = 0 \quad (2.13)$$

em que:

$\Delta Q_{An}$  : resíduo de vazão referente ao anel  $An$  [ $M^3 T^{-1}$ ].

Além das informações já citadas, é necessária uma distribuição inicial de vazões nos trechos que obedeça a lei da conservação de massa. Não é necessário o conhecimento da pressão em um nó e todas as equações são não-lineares, requerendo métodos como o de Newton-Raphson para a resolução do sistema de equações. Essa é a formulação mais difundida o método de solução mais utilizado é o Hardy-Cross (Jeppson, 1979).

## 2.3.2 Métodos de Solução

### Método da linearização de equações

O método busca a linearização das equações não lineares encontradas nas formulações apresentadas. As equações não lineares surgem da aplicação da lei da conservação da energia aos anéis da rede, pois a perda de carga é uma função não linear da vazão. Devido à maior simplicidade de aplicação, é mais utilizado para a resolução no método das vazões.

O processo de linearização é mostrado na eq. 2.14, que representa a perda de carga nos anéis da rede. O termo  $K \cdot Q^{n-1}$  é considerado conhecido e é substituído pela variável  $K'$ . Dessa forma, as  $NA$  equações do método das vazões são linearizadas. Somando-se às  $(NN - 1)$  equações resultantes do balanço de massa nos nós, um sistema de  $(NN + NA - 1)$  equações lineares é formado. As vazões nos trechos são determinadas por meio da resolução desse sistema de equações (1ª iteração). As vazões assim obtidas são utilizadas no cálculo de novos valores de  $K'$  (Jeppson, 1979), de modo que novas equações lineares são formadas. A resolução desse novo sistema de equações leva a novos valores de vazões (2ª iteração). Esse processo iterativo termina quando a diferença entre as vazões de uma iteração e outra é menor do que um erro considerado aceitável.

$$\Delta H_{ij} = K_{ij} \cdot Q_{ij}^n = [K_{ij} \cdot Q_{ij(0)}^{n-1}] \cdot Q_{ij} = K'_{ij} \cdot Q_{ij} \quad (2.14)$$

em que:

$Q_{ij(0)}$  : vazão no trecho  $ij$  na primeira iteração [ $M^3T^{-1}$ ].

Na primeira iteração, para que o termo  $(K_{ij} \cdot Q_{ij}^{n-1})$  seja conhecido, pode-se considerar que  $(K'_{ij} = K_{ij})$ , fazendo  $(Q_{ij(0)} = 1)$ . Assim, não é necessário o estabelecimento de uma distribuição inicial de vazões. Segundo Jeppson (1979), os resultados de cada iteração sucessiva tendem a oscilar em torno do valor verdadeiro. Então, para uma convergência mais rápida, da terceira iteração em diante, os valores das vazões podem ser tomados como a média dos resultados das duas iterações anteriores, como mostra a eq. 2.15. Como a maior parte das equações é linear, a convergência do método é relativamente rápida.

$$Q_{ij}^{(m)} = \frac{Q_{ij}^{(m-1)} + Q_{ij}^{(m-2)}}{2} \quad (2.15)$$

em que:

$Q_{ij}^{(m)}$  : vazão no trecho  $ij$  na iteração  $m$  [ $M^3T^{-1}$ ].

## Método de Newton-Raphson

O método é amplamente utilizado para a resolução iterativa de equações não lineares devido à sua rápida convergência. Sua dedução pode ser feita a partir da aplicação da série de Taylor. A aproximação pela série de Taylor de uma função  $f(X)$ , qualquer, em um ponto  $X^{(m)}$  é apresentada no desenvolvimento da eq. 2.16a. A formulação geral do método (eq. 2.16b) é obtida desprezando-se os termos de ordem superior a 2 e isolando-se  $X$ . A variável  $X$  pode ser chamada  $X^{(m+1)}$ , já que representa o valor de  $X$  na próxima iteração ( $m+1$ ).

$$f(X) = f(X^{(m)}) + (X^{(m+1)} - X^{(m)}) \cdot f'(X^{(m)}) + (X^{(m+1)} - X^{(m)})^2 \cdot \frac{f''(\mathbf{x})}{2} = 0 \quad (2.16a)$$

$$X^{(m+1)} = X^{(m)} - \frac{f(X^{(m)})}{f'(X^{(m)})} \quad (2.16b)$$

A análise das equações 2.16a e 2.16b mostra que o erro da iteração  $m+1$  é proporcional ao quadrado do erro da iteração  $m$ . Esse tipo de convergência é dita quadrática. A extensão do método para sistemas de equações é mostrada em forma matricial na eq. 2.17.

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{f}(X^{(m)}) \quad (2.17)$$

em que:

$\mathbf{x}^{(m+1)}$  : vetor das variáveis  $X$  na iteração ( $m+1$ );

$\mathbf{x}^{(m)}$  : vetor das variáveis  $X$  na iteração ( $m$ );

$\mathbf{D}^{-1}$  : inversa da matriz Jacobiana  $\mathbf{D}$ ;

$\mathbf{f}(X^{(m)})$  : vetor dos valores de cada equação quando  $X = X^{(m)}$ ;

$ne$  : número de equações.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_{ne}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_{ne}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_{ne}}{\partial X_1} & \frac{\partial f_{ne}}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_{ne}}{\partial X_{ne}} \end{bmatrix}$$

O cálculo da inversa da Jacobiana não é necessário, como postula a eq. 2.17. Uma forma alternativa é determinar diretamente o termo  $\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{f}(X^{(m)})$  por meio da obtenção do vetor  $\mathbf{r}$  do sistema de equações 2.18, observando que  $\mathbf{r} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{f}(X^{(m)})$ . Dessa forma, a eq. 2.17 pode ser escrita na forma da eq. 2.19.

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{f}(X^{(m)}) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{r}^{(m)} \quad (2.19)$$

Tendo em vista que a Jacobiana é uma matriz simétrica, o armazenamento computacional é reduzido. O método pode ser aplicado nas três formulações do problema, mas é mais recomendado para os métodos nodal e  $\Delta Q$ , por apresentarem apenas equações não lineares. O método exige uma solução inicial, representada por um vetor  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Com os valores desse vetor é possível o cálculo dos componentes da Jacobiana  $\mathbf{D}$  e do vetor  $\mathbf{f}(X)$ , que são os valores da função  $f(X)$  em cada ponto  $X$  do vetor  $\mathbf{x}^{(0)}$ . Com  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{f}(X)$  o vetor  $\mathbf{r}$  é obtido com a resolução do sistema de equações 2.18. Determinado  $\mathbf{r}$ , o vetor  $\mathbf{x}^{(m+1)}$  é obtido pela eq. 2.19. Com esse vetor  $\mathbf{x}^{(m+1)}$ , nova Jacobiana  $\mathbf{D}$  e novo  $\mathbf{f}(X)$  podem ser determinados. O processo iterativo procede até que a diferença entre os valores de  $\mathbf{x}$  de uma iteração e outra seja aceitável.

Na aplicação ao método nodal, o vetor  $\mathbf{x}$  é substituído pelo vetor  $\mathbf{h}$  das cargas em cada nó e o vetor  $\mathbf{f}(X)$  é substituído pelo vetor dos valores da eq. 2.11 para cada valor de pressão  $H$ . Na aplicação ao método  $\Delta Q$ , o vetor  $\mathbf{x}$  é substituído pelo vetor  $\mathbf{DQ}$  das vazões corretivas em cada anel e o vetor  $\mathbf{f}(X)$  é substituído pelo vetor dos valores da eq. 2.13 para cada valor de  $\Delta Q$ . Nesse caso, uma distribuição inicial de vazões em todos os trechos deve ser estabelecida respeitando a equação da continuidade nos nós, além dos valores iniciais de  $\Delta Q$  em cada anel.

### Método de Hardy-Cross

O método foi proposto em 1936 (Deb, 1976) e é amplamente utilizado ainda hoje, particularmente no Brasil. É baseado no método Newton-Raphson e, ao contrário dos métodos anteriores, resolve uma equação do sistema por vez pelo método de relaxação. Por isso, sua convergência é lenta e, apesar de poder ser aplicado às três formulações do problema, é mais indicado para o método  $\Delta Q$ , por resultar em menor número de equações. É recomendado para o cálculo manual ou em pequenos computadores (Jeppson, 1979).

A aplicação do método de Newton-Raphson ao método  $\Delta Q$  resulta na eq. 2.20, válida para cada anel da rede, em que o termo  $f_{An}(\Delta Q^{(n)})$  corresponde à perda de carga  $\Delta H_{ij}$  (eq. 2.12). Fazendo-se  $\Delta Q = 0$  na primeira iteração, o resultado da derivada em relação a  $\Delta Q$  é a eq. 2.21. Substituindo-se esse resultado na eq. 2.20, o valor inicial de  $\Delta Q$  é obtido (eq. 2.22).



$$\Delta Q_{An}^{(m+1)} = \Delta Q_{An}^{(m)} - \frac{f_{An}^{(m)}}{d[f_{An}^{(m)}]} \quad (2.20)$$

$$\frac{d[f_{An}^{(m)}]}{d[\Delta Q_{An}]} = \frac{d\left[\sum_{(i,j) \in An} K_{ij} \cdot (Q_{ij} + \Delta Q_{An})^n\right]}{d[\Delta Q_{An}]} = \sum_{(i,j) \in An} \left|n \cdot K_{ij} \cdot Q_{ij}^{n-1}\right|$$

$$\Delta Q_{An} = \frac{\sum_{(i,j) \in An} K_{ij} \cdot Q_{ij}^n}{\sum_{(i,j) \in An} \left|n \cdot K_{ij} \cdot Q_{ij}^{n-1}\right|} \quad (2.22)$$

A partir de uma distribuição de vazões na rede que obedeça à lei da conservação da massa nos nós, o valor de  $\Delta Q_{An}$  pode ser calculado pela eq. 2.22, para o anel  $An$ . As vazões desse anel são, então, corrigidas pelo valor de  $\Delta Q_{An}$  segundo a direção de fluxo adotada. Com essa nova distribuição de vazões na rede, o valor de  $\Delta Q_{An+1}$  é calculado para o anel  $An$ . A correção das vazões do anel  $An+1$  leva a uma nova distribuição de vazões. Esse processo é repetido para todos os anéis da rede até que o maior valor de  $\Delta Q$  em todos os anéis seja insignificante. Assim, o método resolve uma equação de cada vez, considerando as vazões de todos os outros anéis e respectivos  $\Delta Q$ 's conhecidos e constantes.

## 2.4. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

Diversas ferramentas matemáticas estão disponíveis para a representação, análise e otimização de sistemas físicos de engenharia, como as redes de distribuição. Para melhor compreensão dessas técnicas alguns conceitos serão definidos.

Modelo matemático é um conjunto de expressões matemáticas que buscam representar o comportamento do sistema físico real. Essas expressões englobam diversos aspectos do sistema, identificando as relações funcionais entre seus componentes e o ambiente, estabelecendo medidas de efetividade das soluções, restrições e dados a serem coletados (Haines, 1977).

Processo de otimização é o procedimento de seleção da melhor solução de um problema. Modelo de otimização é o modelo matemático que executa esse processo. Esse processo é caracterizado pela busca por valores em certas variáveis que otimizam uma função que

representa a performance da solução, respeitando restrições impostas (Salkin, 1975). Esquemáticamente, são definidos os seguintes elementos do problema de otimização:

**Função objetivo:** Função que deve ser maximizada ou minimizada, representando a performance da solução;

**Variáveis de decisão:** Variáveis que compõem a função objetivo e cujo valor deve ser alterado de modo a otimizar o problema;

**Restrições:** Conjunto de equações ou inequações a que estão sujeitas as variáveis de decisão, representando limitações ao conjunto de soluções possíveis. Têm origem nas leis físicas, como conservação da energia e massa, leis políticas, como critérios normativos, limitações de recursos financeiros e limitações físicas;

**Solução viável:** Conjunto de valores das variáveis de decisão que satisfaz às restrições do problema; O conjunto de soluções viáveis define um subconjunto do total de soluções possíveis, delimitado pelas restrições;

**Solução ótima:** Solução viável que faz com que a função objetivo assuma o valor máximo ou mínimo, ou seja, otimizado.

De acordo com as características da função objetivo, variáveis de decisão e restrições, o problema de otimização pode ser classificado como (Haimes, 1977):

**Linear:** Quando a função objetivo e todas as restrições são lineares;

**Não linear:** Quando a função objetivo e/ou as restrições são não lineares;

**Determinístico:** Quando os valores de cada variável de decisão ou parâmetros podem ser associados a valores definidos, não existindo incertezas;

**Probabilístico:** Quando os valores das variáveis de decisão ou parâmetros não são precisamente conhecidos, existindo níveis de incerteza;

**Estático:** Quando a variável tempo não é considerada explicitamente, o que caracteriza os problemas de Programação Matemática;

**Dinâmico:** Quando a variável tempo é considerada explicitamente, o que caracteriza os problemas de Controle Ótimo;

Distribuído: Quando são consideradas variações espaciais de comportamento, em todo o sistema em questão;

Concentrado: Quando variações espaciais são ignoradas e variáveis dependentes são consideradas homogêneas em todo o sistema;

Para a resolução de problemas de otimização dinâmicos são utilizadas outras técnicas baseadas, por exemplo, na Teoria das Filas, na Teoria dos Jogos, nas Redes de Fluxo, no Cálculo de Variações, no Princípio do Máximo, na Quase Linearização e Métodos de Decomposição. Os problemas de Programação Matemática (estáticos) podem ser agrupados em seis categorias, conforme a tabela 2.4 (Haimes, 1977). À cada categoria corresponde um ou vários métodos e técnicas de solução, alguns deles citados na tabela 2.5. A seguir, fundamentos de métodos e técnicas a serem utilizados no desenvolvimento deste trabalho, como a Programação Linear e a técnica *Branch and Bound* de Programação Inteira, são apresentados.

Tabela 2.4 – Problemas de Programação Matemática.

<b>Problema</b>	<b>Configuração típica</b>
Não restrito	$\min f(X)$
Com restrições de igualdade	$\min f(X)$ Sujeito a: $w_j(X) = B_j$
Linear	$\min CF_1X + CF_2$ sujeito a: $CR_1X + CR_2 \geq B$ $X \geq 0$
Não linear	$\min f(X)$ sujeito a: $w_j(X) \geq 0$ $f(X)$ e/ou $w_j(X)$ são funções não lineares
Quadrático	$\min CF_1X^2 + CF_2X$ sujeito a: $CR_1X + CR_2 \geq B$ $X \geq 0$
Separável	$\min \sum_{i=1}^{nv} f_i(X_i)$ sujeito a: $CR_1X_i + CR_2 \geq B$ $X_i \geq 0$
Discreto	Qualquer problema acima, adicionando-se a restrição de que certas variáveis sejam inteiras

Obs.: Os sinais  $\geq$  podem ser substituídos por  $\leq$  a depender do problema.

Tabela 2.5 – Alguns métodos e técnicas de solução.

Método	Técnica
Cálculo	Maximização e minimização de funções
Programação Linear	Simplex original (primal) Simplex revisado Algoritmo primal – dual Simplex combinado
Programação Não Linear	Multiplicadores de Lagrange Técnicas de busca direta Funções de penalidade Técnicas de gradiente Programação geométrica
Programação Inteira	Método de Gomory Enumeração implícita Enumeração <i>Branch and Bound</i> Restrições substitutas Cortes inteiros e combinatórios Teoria de Grupo
Programação Dinâmica	Programação dinâmica determinística Programação dinâmica estocástica

### 2.4.1. Conceitos fundamentais em otimização de funções

Em um problema de otimização é fundamental o conhecimento das características matemáticas do conjunto das soluções possíveis, delimitado pelas restrições, e do comportamento da função objetivo. Essas características podem ser deduzidas em um espaço bidimensional (Euclidiano) e estendidas para o espaço de “ $n$ ” variáveis, no qual se enquadra a maioria dos problemas reais.

As restrições de um problema linear podem ser representadas por retas, planos ou hiperplanos, no caso de 2, 3 ou “ $n$ ” variáveis de decisão, respectivamente. As inequações delimitam regiões no espaço de soluções denominadas “semi-espacos”. As restrições são constituídas por hiperplanos e semi-espacos que delimitam o conjunto de soluções possíveis do problema (Cooper e Steinberg, 1970).

O conjunto de soluções será convexo se o segmento que une qualquer par de pontos está contido no conjunto também. Se a reta passar por pontos que não pertençam ao conjunto, esse será côncavo ou não convexo. Esse conceito é ilustrado na fig. 2.4, mostrando que um conjunto convexo é sólido e sem buracos ou reentrâncias. Para ser convexo, o segmento  $s$  deve fazer parte do conjunto para qualquer par de pontos ( $P_1, P_2$ ) pertencente ao conjunto, conforme a eq. 2.23.

$$s = \{X / X = fX_1 + (1 - f)X_2\} \quad 0 \leq f \leq 1 \quad (2.23)$$

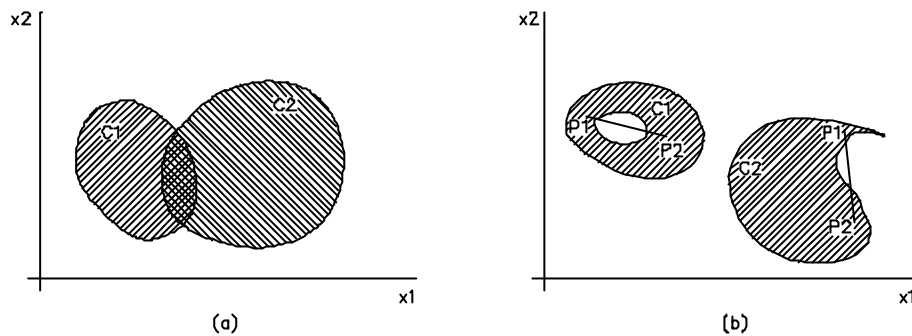


Figura 2.4 – Conjuntos convexos (a) e côncavos (b).

As restrições lineares definem conjuntos convexos, já que hiperplanos e semi-espacos são sempre convexos. Pontos extremos de um conjunto convexos são os que não estão sobre um segmento que une dois outros pontos do conjunto (Stark e Nicholls, 1972). Em problemas lineares, a solução ótima é constituída por um ponto extremo do conjunto solução; já em problemas não lineares isso não ocorre porque o conjunto solução é não convexo, o que dificulta a sua resolução.

A função objetivo pode assumir valores ótimos relativos e globais. A função assume um máximo (mínimo) relativo ou local em um ponto  $X^0$  se existir um intervalo ao redor  $X^0$  em que todos os valores assumidos pela função são menores (maiores). O máximo (mínimo) global é assumido em um ponto  $X^0$  se os valores assumidos pela função são menores (maiores) em qualquer outro ponto. Esses conceitos são ilustrados na fig. 2.5.

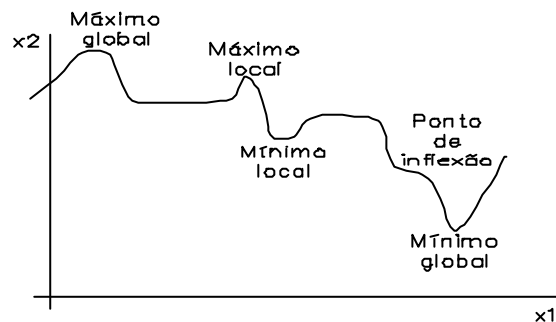


Figura 2.5 – Máximos e mínimos locais e globais.

Se a função objetivo possuir apenas um ótimo local, este é global e a função é denominada “unimodal”. Quando existem vários ótimos locais, a função é denominada “multimodal”. Como sempre é possível delimitar um intervalo em que a função é unimodal, o ótimo global de funções multimodais não é encontrado facilmente (Cooper e Steinberg, 1970).

A condição necessária para que uma função assuma um ótimo local em um ponto  $X^0$  é que a sua primeira derivada em relação a todas as variáveis seja nula nesse ponto, chamado

“estacionário”. Para que esse ponto seja um mínimo local, a matriz Hessiana (segundas derivadas) deve ser positiva definida e para que seja um máximo local, a matriz Hessiana deve ser negativa definida.

A função objetivo pode ser convexa ou côncava, dentro de conjunto convexo definido (intervalo, no caso bidimensional). A função é convexa se o segmento que liga qualquer par de pontos estiver sempre acima da função. Se a reta estiver abaixo da função, essa é côncava. Esse conceito é ilustrado pelas eqs. 2.24 e fig. 2.6. Essa figura mostra que, se a função é convexa, qualquer mínimo local é global e se a função é côncava, qualquer máximo local é global.

$$\text{Função convexa: } f[\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1] \leq \lambda f(X_2) + (1-\lambda) \cdot f(X_1) \quad (2.24a)$$

$$\text{Função côncava: } f[\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1] \geq \lambda f(X_2) + (1-\lambda) \cdot f(X_1) \quad (2.24b)$$

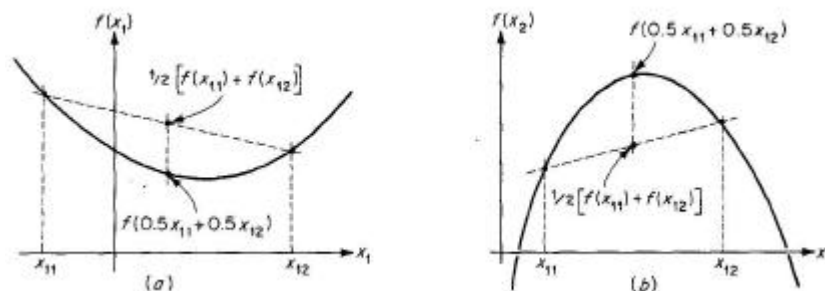


Figura 2.6 – Funções convexas (a) e côncavas (b) para  $\lambda = 0,5$ .

O problema de otimização do dimensionamento de redes é altamente complexo porque a função objetivo que representa os custos das tubulações é côncava e multimodal e deve ser minimizada. Além disso, algumas restrições são não lineares, tornando o conjunto de soluções possíveis não convexo. Para amenizar essas dificuldades, muitos modelos de otimização linearizam as equações, para que o problema possa ser resolvido por Programação Linear.

## 2.4.2. Multiplicadores de Lagrange

O conceito de Multiplicadores de Lagrange é importante porque guarda estreita relação com a teoria da dualidade. Esse conceito é baseado no fato de que maximizar uma função de performance sujeita a um limite superior de custo é equivalente a minimizar uma função de custo sujeita a um limite inferior de performance (Converse, 1970). Assim, existe uma relação entre a função objetivo e as restrições, na qual o método dos Multiplicadores de Lagrange é baseado.

Considerando-se que a performance e o custo podem ser tanto função objetivo como restrições, o problema pode ser formulado como uma soma ponderada dessas duas funções. Baseando-se nisso, os Multiplicadores de Lagrange  $\lambda^1$  incorporam as restrições na função objetivo, eliminando-as e reduzindo a dimensão do problema (Converse, 1970). As eq. 2.25 e 2.26 ilustram esse processo.

$$\text{Minimizar:} \quad Z(X_1, X_2) \quad (2.25a)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad w(X_1, X_2) = B \quad (2.25b)$$

em que:

$Z(X_1, X_2)$  : função objetivo;

$X_1, X_2$  : variáveis de decisão;

$w(X_1, X_2)$  : restrição;

$B$  : termo independente.

Para incorporar a restrição  $w$  na função objetivo, a variável  $\lambda$  (multiplicador de Lagrange) e a função *Lag* (lagrangiana) são definidas e o problema fica formulado conforme a eq. 2.32. A otimização da função *Lag* é equivalente à otimização da função original (2.31a).

$$\max Lag = Z(X_1, X_2) - \mathbf{I} \cdot [w(X_1, X_2) - B] \quad (2.26)$$

em que:

*Lag* : função Lagrangiana;

$\mathbf{I}$  : multiplicador de Lagrange.

A função *Lag* será ótima em um ponto estacionário, encontrado a partir das primeiras derivadas em relação às variáveis de decisão, como na eq. 2.27 (Cooper e Steinberg, 1970). O valor de  $\mathbf{I}$  é obtido resolvendo-se o sistema formado pelas equações 2.27. O valor ótimo de  $\mathbf{I}$  é o que anula o segundo termo da eq. 2.26, respeitando a restrição do problema.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Lag}{\partial X_1} &= \frac{\partial Z}{\partial X_1} - \mathbf{I} \frac{\partial w}{\partial X_1} = 0 \\ \frac{\partial Lag}{\partial X_2} &= \frac{\partial Z}{\partial X_2} - \mathbf{I} \frac{\partial w}{\partial X_2} = 0 \\ \frac{\partial Lag}{\partial \mathbf{I}} &= w(X_1, X_2) - B = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

---

<sup>1</sup> O multiplicador  $\lambda$  também é chamado benefício marginal ou preço sombra (Haimes, 1977).

Se a função  $Z$  representa o custo a ser minimizado, o multiplicador  $I$  pode ser interpretado como a redução de custo resultante de uma redução unitária na performance requerida (relaxação), representada pela restrição  $w$  (Stark e Nicholls, 1972). O valor nulo de  $I$  indica que a relaxação da restrição não implica em melhora da função objetivo, ou seja, a restrição é inativa. Quando  $I$  é positivo, a restrição é ativa pois a sua relaxação faz com que a função objetivo melhore (Haimes, 1977).

### 2.4.3. Programação Linear

Programação Linear (PL) é um modelo de otimização desenvolvido para problemas lineares e estabelecido em termos matemáticos em 1947 por Dantzig, para resolver problemas logísticos da Força Aérea Americana. Dentre as aplicações mais comuns destacam-se as de alocação ótima de recursos limitados a atividades competitivas (Barbosa, 1997). Sua formulação convencional, chamada problema primal, é dada na eq. 2.28.

$$\text{Maximizar:} \quad Z = \sum_{i=1}^{nv} CF_i \cdot X_i \quad (2.28a)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^{nv} CR_{ij} X_i \leq B_j \quad j = \{1, 2, \dots, nr\} \quad (2.28b)$$

$$X_i \geq 0 \quad i = \{1, 2, \dots, nv\} \quad (2.28c)$$

em que

$Z$  : função objetivo;

$X$  : variáveis de decisão;

$CF$  : coeficientes fixos da função objetivo;

$CR$  : coeficientes fixos das restrições;

$nr$  : número de restrições;

$nv$  : número de variáveis de decisão.

$B$  : termo independente;

Qualquer problema linear pode ser formulado dessa forma observando-se que maximizar  $Z$  é equivalente a minimizar  $-Z$  e que restrições expressas por desigualdades podem ser expressas por igualdades, utilizando-se variáveis de folga. O problema assume sua forma canônica quando a função objetivo deve ser minimizada e as restrições são expressas por igualdades. Os algoritmos de PL são baseados nos seguintes teoremas (Cooper e Steinberg, 1970):



1 - O conjunto das soluções viáveis é um conjunto convexo cujos extremos correspondem a soluções básicas viáveis (solução possível com não mais que  $nr$  valores positivos de  $X_i$ );

2 - A função objetivo assume seu valor ótimo em um extremo do conjunto de soluções possíveis;

3 - Se o número de restrições expressas por equações linearmente independentes é menor do que  $nr$ , a solução desse sistema de equações é um ponto extremo do conjunto de soluções possíveis;

A todo problema primal é associado um outro denominado problema dual, construído com base nas regras da tabela 2.6. A dedução do problema dual pode ser feita a partir da aplicação do método dos Multiplicadores de Lagrange ao problema primal (Haimes, 1977).

Essa dedução mostra que os coeficientes da função objetivo do problema dual são os Multiplicadores de Lagrange, respondendo pelo mesmo conceito apresentado anteriormente e aqui chamados de variáveis duais. Assim, as soluções dos problemas primal e dual são as mesmas e as variáveis duais representam a variação da função objetivo em relação aos termos independentes  $B_j$  das restrições, que correspondem aos recursos limitados.

Tabela 2.6 – Relações entre os problemas primal e dual.

Elemento	Primal	Dual
Função objetivo	$\max Z = \sum_{i=1}^n CF_i \cdot X_i$	$\min U = \sum_{j=1}^m B_j \cdot \mathbf{I}_j$
Restrições	$\sum_{i=1}^n CR_{ij} X_i \leq B_j$ $X_i \geq 0$	$\sum_{i=1}^n CR_{ji} \mathbf{I}_j \geq CF_i$ $\mathbf{I}_j \geq 0$
Variáveis de decisão	$X$	$\mathbf{I}$
Nº de variáveis de decisão	$nv$	$nr$
Nº de restrições	$nr$	$nv$
Sinal das restrições	$\leq$	$\geq$

Os seguintes teoremas são decorrentes da teoria da dualidade (Cooper e Steinberg, 1972):

1. O dual do dual é o primal;
2. Em um problema de maximização, o valor da função objetivo no primal é sempre menor ou igual ao valor no dual, ou seja,  $Z \leq U$  em um problema de minimização,  $Z \geq U$ ;
3. Se um do par de problemas dual / primal tem solução ótima, então o outro problema também tem; se as soluções dos problemas primal e dual são iguais, essa é a solução ótima.

O primeiro algoritmo de PL desenvolvido – o SIMPLEX – é ainda utilizado atualmente, embora existam métodos mais eficientes na aplicação a problemas de grande porte (Barbosa, 1997). O SIMPLEX utiliza ferramentas baseadas na Álgebra Linear para determinar a solução ótima por um processo iterativo (Goldberg e Luna, 2000). Diversos são os programas computacionais que resolvem problemas de PL, como o EXCEL<sup>®</sup> e o LINDO<sup>®</sup>.

#### **2.4.4. Programação Inteira e o algoritmo *Branch and Bound***

Os problemas de Programação Inteira (PI) surgem quando em qualquer das formulações da tab. 2.4 é exigido que algumas variáveis assumam apenas valores inteiros. O primeiro algoritmo eficiente foi desenvolvido por Gomory em 1958, utilizando a técnica do plano de corte. As técnicas de enumeração surgiram em 1960 a partir do algoritmo de Land e Doig, sendo a aplicação a problemas de PI com valores 0 ou 1 desenvolvida por Balas em 1965 (Salkin, 1975).

As técnicas de enumeração baseiam-se no fato de que em um espaço limitado de soluções possíveis o conjunto de valores das variáveis de decisão é finito. Geralmente, podem ser representadas por diagramas “em árvore” em que cada nó representa uma divisão do espaço de soluções (fig. 2.7). Essa divisão é efetuada a partir da fixação de uma das variáveis de decisão e variação das outras. Cada valor assumido pelas outras variáveis, juntamente com o valor fixado de uma das variáveis, representa um nó ou solução. O subespaço de soluções possíveis oriundo da divisão do espaço original é denominado “partição”. Quando a divisão do espaço de soluções de um nó não produz melhores resultados, esse nó é definido como “explorado”. Um nó não explorado que ainda não sofreu partição é denominado “ativo”. O processo de “ramificação” se refere à escolha de um nó ativo para partição ou exploração. O processo de enumeração termina quando não existem mais nós ativos.

O algoritmo *Branch and Bound* é uma das técnicas de enumeração desenvolvida para resolução de problemas de PI. As soluções possíveis são enumeradas de forma otimizada a partir da divisão do espaço de soluções (*branch*). Em cada divisão, é avaliado o valor ótimo da função objetivo que, por ser contínua, representa um limite para a solução inteira (*bound*).

O algoritmo *Branch and Bound* adota o esquema de enumeração em árvore, calculando limites inferiores e superiores para a função objetivo a fim de acelerar o processo (Garfinkel e Nemhauser, 1972). Em um problema de minimização, o limite inferior é calculado a partir do problema original, admitindo-se um espaço de solução maior do que o original, podendo

ser atingido resolvendo-se o problema com variáveis contínuas. Como o espaço de soluções sofre divisões sucessivas, o limite inferior de um nó qualquer é sempre válido para seus nós sucessores. O limite superior<sup>1</sup> é representado pela solução de qualquer problema com variáveis inteiras, sendo sempre maior (pior) do que o ótimo. No diagrama em árvore, o nó posterior tem limite superior sempre maior (pior) do que o valor ótimo do seu nó antecessor. Dessa forma, um nó é considerado explorado se o seu valor ótimo é maior ou igual ao limite superior do nó antecessor. A abordagem básica do algoritmo pode ser descrita em 4 passos (Salkin, 1975):

**Passo 1 – Iniciação:** Um valor ótimo  $Z^*$  da solução objetivo é arbitrado. O problema é resolvido considerando as variáveis contínuas e livres. Se a solução for inteira ou impossível, o algoritmo termina indicando a solução ótima ou a impossibilidade de solução, respectivamente;

**Passo 2 – Ramificação:** Uma das variáveis cujo valor é fracionário é escolhida ( $X_i$ ). Dois novos subproblemas (nós) são definidos restringindo-se essa variável a valores maiores e menores que os valores inteiros próximos do original (e.g. se o valor original é  $X_k = 1,8$  as restrições serão  $X_i \leq 1$  e  $X_i \geq 2$ ). Esse é o processo de partição. Cada subproblema é resolvido e os de solução melhor do que  $Z^*$  são considerados nós ativos. O valor de  $Z^*$  é atualizado pela melhor solução. Todos os nós ativos de solução pior do que  $Z^*$  são considerados explorados;

**Passo 3 – Verificação:** Se não existem nós ativos, a solução ótima é  $Z^*$  ou não existe solução;

**Passo 4 – Limitação:** O nó ativo de melhor solução é escolhido. O seu limite inferior é a solução do problema correspondente ao seu nó antecessor. O seu limite superior é a pior solução dentre os nós ativos. A solução desse nó ativo é o limite inferior para todos os nós criados pelo mesmo. O algoritmo retorna ao passo 2 para a ramificação do nó escolhido.

Para maior eficiência da técnica, são definidas estratégias de ramificação e partição que, por exemplo, preconizam que apenas os nós recentemente gerados sejam ramificados. A fig. 2.7 ilustra o algoritmo aplicado ao seguinte problema de maximização (Goldbarg e Luna, 2000):

---

<sup>1</sup> No problema de maximização, o termo limite inferior deve ser substituído por limite superior e vice-versa.

Maximizar:  $Z = 5X_1 + 8X_2$  (2.29a)

Sujeito a:  $X_1 + X_2 \leq 6$  (2.29b)  
 $5X_1 + 9X_2 \leq 45$   
 $X_1, X_2 \in \mathbb{Z}^+$

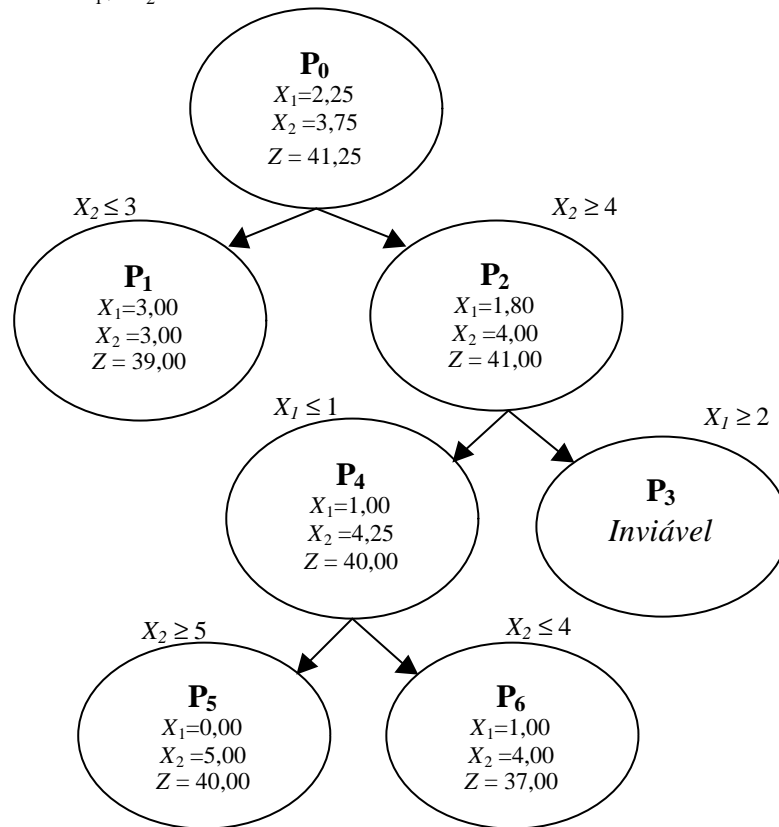


Figura 2.7 – Diagrama em árvore representando o algoritmo *Branch and Bound*.

O problema  $P_0$  é linear com variáveis contínuas e corresponde ao passo 1, assumindo-se  $Z^* = 0$ . No passo 2, a variável  $Y$  é escolhida, definindo-se os problemas  $P_1$  e  $P_2$ . Esses nós são ativos e o de melhor solução é escolhido ( $P_2$ ). Agora,  $Z^* = 41$ . O passo 3 indica que existem nós ativos e o algoritmo continua. No passo 4 é definido o limite superior de 41 e o algoritmo retorna ao passo 2.  $P_2$  é ramificado, escolhendo-se a variável  $X$ , nos nós  $P_3$  e  $P_4$ .  $P_3$  é resolvido e revela-se inviável. Então, a solução de  $P_4$  (40,40) passa a ser o limite superior e a variável  $Y$  é escolhida para ramificação, por apresentar valor fracionário. Assim, são definidos  $P_5$  e  $P_6$ . Resolvendo-se  $P_5$ , obtém-se  $Z = 40,00$  e  $P_6$  é considerado explorado, já que o limite superior é 40,40. Da comparação entre  $P_5$  e  $P_1$  surge o valor ótimo com variáveis inteiras de  $Z = 40,00$ .

## 2.5. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

A análise da confiabilidade de sistemas teve início na década de quarenta devido a problemas verificados com equipamentos eletrônicos utilizados na segunda guerra mundial. A partir de esforços do ministério da defesa norte americano iniciados em 1952, os conceitos foram difundidos em diversas áreas do conhecimento (Kapur e Lamberson, 1977).

Segundo Kapur e Lamberson (1977), a confiabilidade pode ser definida como a probabilidade do sistema apresentar performance adequada à sua função pretendida quando operado sob determinadas condições ambientais em um intervalo de tempo definido. A falha ocorre quando o sistema não é capaz de exercer as funções projetadas.

O tempo de operação necessário para que um equipamento falhe (tempo para falha) é tratado como uma variável aleatória descrita por uma distribuição de probabilidades. A probabilidade de o equipamento falhar em um tempo  $t$  pode ser expressa pela equação 2.30a, que define a chamada função de falha. A confiabilidade, como probabilidade de sucesso em um tempo  $t$ , pode ser expressa pela equação 2.30b.

$$R(t) = P[\mathbf{t} > t] \quad (2.30a)$$

$$F(t) = 1 - R(t) = P[\mathbf{t} \leq t] \quad (2.30b)$$

Em que:

$R(t)$  : função de confiabilidade;

$F(t)$  : função de falha;

$t$  : tempo;

$\mathbf{t}$  : variável aleatória tempo para falha;

$P[\mathbf{t} > t]$  : probabilidade do tempo de falha ser maior do que  $t$ ;

A expectativa de vida é definida como o tempo durante o qual o equipamento operará com sucesso, podendo ser expressa pela equação 2.31 (Catuneanu e Mihalache, 1989). A expectativa de vida é chamada de tempo médio entre falhas (*TMF*) ou tempo médio para falha, no caso de equipamentos reparáveis ou não reparáveis, respectivamente.

$$E(\mathbf{t}) = \int_0^{\infty} \mathbf{t}R(\mathbf{t})d\mathbf{t} \quad (2.31)$$

Em que:

$E(\mathbf{t})$  : expectativa de vida;

$\mathbf{t}$  : variável de integração.

A probabilidade da falha ocorrer em um intervalo de tempo  $\Delta t$  pode ser expressa pela equação 2.32a. A taxa de falha por unidade de tempo nesse intervalo é dada pela equação 2.32b. Quando o valor de  $\Delta t$  tende a zero, a taxa de falha é chamada função de risco, que pode ser representada pela equação 2.32c (Kapur e Lamberson, 1977).

$$P(\Delta t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{\infty} f(t)dt - \int_{t_2}^{\infty} f(t)dt = R(t_1) - R(t_2) \quad (2.32a)$$

$$TF = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{\Delta t \cdot R(t_1)} \quad (2.32b)$$

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot R(t)} = \frac{1}{R(t)} \left[ \frac{d}{dt} R(t) \right] = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.32c)$$

Em que:

$\Delta t$  : intervalo de tempo;

$P(\Delta t)$  : probabilidade da falha ocorrer no intervalo de tempo  $\Delta t$ ;

$R(t_1)$  : confiabilidade no tempo 1;

$R(t_2)$  : confiabilidade no tempo 2;

$h(t)$  : função de risco;

$TF$  : taxa de falhas;

$f(t)$  : distribuição de probabilidades de densidade do tempo para falha.

A disponibilidade refere-se ao intervalo de tempo em que o equipamento pode ser utilizado quando desejado, durante o qual o seu estado é operativo. Em equipamentos reparáveis, o tempo necessário para a restauração de suas condições normais após a ocorrência de uma falha é denominado tempo de reparo ( $TMR$ ). Portanto, a disponibilidade pode ser definida em função do  $TMF$  e do  $TMR$ , já que a soma desses tempos é igual ao tempo total de análise, como na equação 2.33 (Kapur e Lamberson, 1977).

$$Pop = \frac{TMF}{TMF + TMR} \quad (2.33)$$

Em que:

$Pop$  : disponibilidade ou probabilidade do componente estar em estado operativo;

$TMF$  : tempo médio entre falhas;

$TMR$  : tempo médio para reparo.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada uma revisão dos principais trabalhos de pesquisa desenvolvidos até o presente. Serão citados os trabalhos relacionados com o problema de otimização do dimensionamento de redes e com a avaliação de sua confiabilidade.

#### 3.1 OTIMIZAÇÃO DO DIMENSIONAMENTO

O problema da otimização do dimensionamento de redes de distribuição foi alvo de inúmeras pesquisas nas últimas três décadas. Ainda que o problema da otimização de redes ramificadas esteja resolvido, o método de solução definitivo que garanta o ótimo global para o caso de redes malhadas não existe ainda (Martinez *et al.*, 1995 *apud* Montesinos *et al.*, 1999). Após diversas pesquisas, alguns autores chegam a afirmar que, com as ferramentas de otimização existentes, não é possível resolver o problema geral do projeto ótimo com toda a sua complexidade (Eiger *et al.*, 1994).

Esse fato pode ser explicado pelas características das redes malhadas. Os modelos de otimização, quando aplicados a uma única configuração de demanda, resultam em sistemas ramificados ao invés de sistemas malhados, a menos que a solução seja restringida de modo a forçar a formação de anéis (Walski *et al.*, 1987; Deb, 1976). Restrições para garantir a formação de anéis na rede, como as de diâmetro mínimo, fazem com que a solução ótima seja uma rede ramificada fechada por tubulações de diâmetro mínimo (Quindry *et al.*, 1981). Dessa forma, existe uma relação antagônica entre o custo e a confiabilidade da rede, em que um aprimoramento de um fator implica na depreciação do outro.

Outra dificuldade é associada à existência de elementos discretos no sistema, como bombas, válvulas e diâmetros comerciais, cuja descrição matemática aumenta a complexidade. As tubulações disponíveis comercialmente são de diâmetros inteiros específicos. Considerando-se que cada trecho da rede deve ter um único diâmetro, o número de combinações possíveis é extremamente alto. Sendo 5 diâmetros disponíveis e uma rede com  $NT$  trechos, o número de combinações possíveis é de  $5^{NT}$ . Isso impõe uma grande dificuldade aos modelos de otimização, que tem sido superada pela substituição dos diâmetros fracionários de cada trecho por dois segmentos de diâmetros comerciais, de modo que as características hidráulicas do trecho sejam preservadas. Tal solução pode ser insatisfatória em termos construtivos.

O custo da rede é uma função multimodal, o que dificulta a utilização de métodos convencionais de otimização por busca direcional. Na literatura, métodos que permitem uma melhora posterior da função objetivo uma vez que uma solução ótima local é obtida tiveram suas primeiras aplicações na década de noventa. O primeiro modelo de otimização global foi desenvolvido por Eiger *et al.* (1994), com base em uma complexa formulação matemática.

Essas dificuldades impuseram limitações aos modelos desenvolvidos que são relacionadas com o tamanho da rede, número de cenários de demanda analisados e tipos de componentes dimensionados (Lansey e Mays, 1989). Ou seja, os modelos são incapazes de otimizar redes que possuem muitos trechos, devido à quantidade de restrições que devem ser impostas. Igualmente, como cada cenário impõe um novo conjunto de restrições ao problema, limitações computacionais não permitem a análise de diversas configurações de demanda. A inclusão de componentes como válvulas e bombas também tende a aumentar a complexidade do problema e exaurir as capacidades computacionais.

Segundo Walski (1995), existem pelo menos quatro tipos diferentes de problemas no dimensionamento de redes de tubulações. A escolha entre planejamento geral, projeto preliminar, plano de subdivisão e de reabilitação resulta em características e simplificações distintas, exigindo diferentes abordagens dos modelos de otimização. A consideração dos aspectos reais das tomadas de decisão, de acordo com cada problema, pode ser um fator decisivo para o uso efetivo dos modelos desenvolvidos.

Shamir (1974) apresenta uma detalhada revisão dos trabalhos anteriores a 1974, que se concentraram no problema do dimensionamento, colocando diâmetros como variáveis de decisão e a soma dos custos de implantação e operação como função objetivo. Normalmente, é considerado o estado permanente representando apenas as configurações típicas de demanda. Os modelos de otimização são baseados em técnicas de gradientes, busca aleatória de diâmetros com penalidades nas restrições, gradientes aproximados da função objetivo para a sua avaliação em pontos próximos, processo iterativo aplicado a redes ramificadas, programação separável, conceitos de diâmetro equivalente e superfície de pressão e índices de performance de alternativas discretas.

O primeiro modelo para determinação dos diâmetros de uma rede malhada a um custo mínimo, desenvolvido por programação linear (PL), foi apresentado por Lai e Schaake (1969, *apud* Quindry *et al.*, 1981), que formularam o problema em dois passos: uma transformação de variáveis para a linearização das restrições e uma aproximação linear da função objetivo, que representa o custo em função da variável transformada. Nessa formulação, as pressões nos nós devem ser conhecidas.



Shamir (1973, 1974) propõe um modelo de otimização do dimensionamento e operação de redes malhadas baseado no método de programação não linear GRG2 (*Generalized Reduced Gradient*). As variáveis de decisão podem ser diâmetros dos trechos ou capacidades de bombas, no caso do dimensionamento, e pressões, consumos, posições de válvulas e bombas, no caso da operação. A função objetivo é formulada como a soma dos custos iniciais e/ou de operação. Como restrições, as variáveis de decisão e dependentes devem estar dentro de uma faixa de valores possíveis e as equações do problema hidráulico devem ser respeitadas. A cada iteração, as variáveis de decisão são consideradas fixas para o cálculo da rede e os gradientes reduzidos da função objetivo são encontrados. As variáveis de decisão são alteradas na direção de redução do custo, com base nos gradientes. A busca é terminada quando um mínimo local é encontrado ou o número de iterações atinge um limite. O método é limitado quanto ao número de variáveis de decisão que pode abordar e a solução encontrada pode estar muito distante do ótimo global.

Deb (1976) apresenta, também, uma ampla revisão dos trabalhos publicados até a data. A partir da aplicação da primeira e segunda derivada do custo ( $FC$ ) em relação à vazão ( $Q$ ), mostra que o custo máximo se dá quando  $(\partial FC/\partial Q = 0)$  e quanto maior  $(\partial FC/\partial Q)$ , menor o custo. No limite, quando  $(\partial FC/\partial Q = \infty)$ , a rede tem custo mínimo e assume a configuração ramificada. O método proposto aplica sucessivos fatores de correção às vazões de modo a maximizar  $\partial FC/\partial Q$ . Em um desenvolvimento matemático, analisa o efeito da pressão no ponto de suprimento da rede (reservatório), da perda de carga no sistema e dos diâmetros no custo total. Analisando a superfície piezométrica no sistema, desenvolve uma técnica para a localização ótima do reservatório na rede, que deve ficar próximo ao centro da mesma. No desenvolvimento, apenas o caso de um reservatório é analisado, os diâmetros são considerados contínuos e a superfície piezométrica é considerada parabólica.

Alperovits e Shamir (1977) apresentam o primeiro método que incorpora o cálculo da rede no procedimento de otimização. O método (*Linear Programming Gradient – LPG*) utiliza a PL em conjunto com uma busca por gradiente e é uma referência importante para diversos trabalhos posteriores. Partindo da aplicação da PL a redes ramificadas em que comprimentos de segmentos com diâmetros comerciais são as variáveis de decisão, é feita uma extensão para redes malhadas por meio da incorporação da lei da conservação da energia nos anéis às restrições e da fixação inicial das vazões, o que lineariza as equações. A distribuição de vazões é alterada a cada iteração, de modo a reduzir o custo da rede (função objetivo). A alteração da vazão é proporcional ao gradiente de custo com a correção da vazão ( $dy/dQ$ ), calculado com base nas variáveis duais da restrição do balanço de energia nos anéis no problema de PL. As novas vazões são, então, fixadas, e o problema de

PL é novamente resolvido, resultando em novos comprimentos. O processo termina quando nenhuma melhora é atingida na função objetivo. A fig. 3.1 ilustra o processo iterativo.

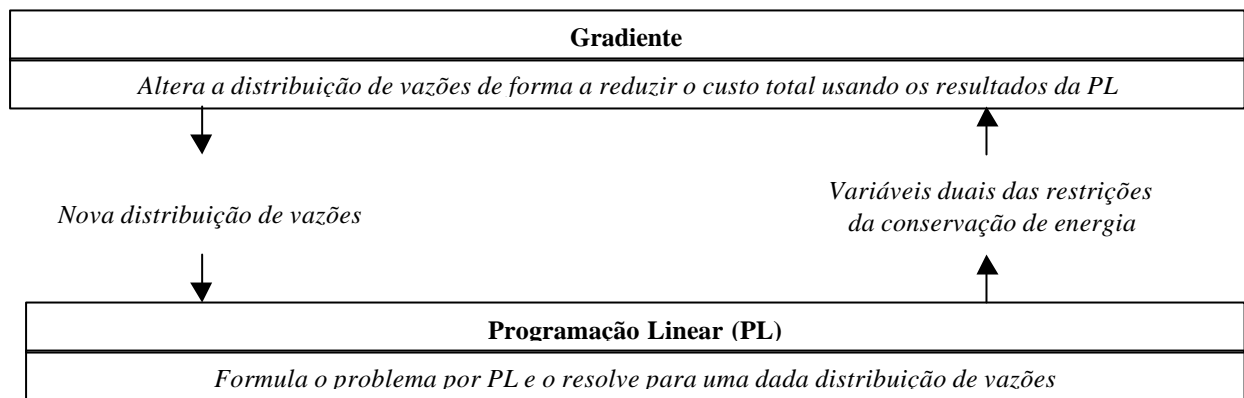


Figura 3.1 – Modelo de otimização LPG de Alperovits e Shamir (1977).

O método foi implementado por Vieira (1980), obtendo-se bons resultados em relação ao método heurístico convencional baseado na análise hidráulica. Por outro lado, são apontadas dificuldades computacionais na aplicação a redes de grande porte, observadas por Lansey e Mays (1989) e Quindry *et al.* (1981), e a obtenção de diferentes soluções com a alteração dos valores iniciais de vazão e escolha do caminho ao longo da rede para a definição das restrições de perda de carga máxima, reportada por Goulter *et al.* (1986).

Quindry *et al.* (1981) apresentam uma modificação do LPG, incorporando um passo de busca por gradiente à formulação de Lai e Schaake (1969), de modo a determinar as cargas nos nós a cada iteração, ao invés das vazões. Um método de gradiente é utilizado para alterar as cargas de forma que a solução da PL levará a uma redução do valor da função objetivo (custo). A aplicação do método ao problema da expansão do sistema de distribuição de água da cidade de Nova York, apresentado por Lai e Schaake (1969), resulta numa redução significativa do custo, mostrando que a variação da função objetivo é muito sensível às variações das cargas nos nós. Segundo Lansey e Mays (1989), dificuldades aparecem quando da análise de múltiplos cenários e apenas tubulações podem ser incluídas no dimensionamento. Segundo Eiger *et al.* (1994), os trabalhos baseados no gradiente do custo consideraram insignificante o fato de que sua existência não é garantida.

Goulter *et al.* (1986) alegam problemas com a freqüência com que um trecho aparece nas restrições de perda de carga máxima. Posteriormente, Kessler e Shamir (1989) refutaram essa falha do modelo LPG por meio de desenvolvimentos matemáticos. Nesse trabalho,

implementações são sugeridas para aprimoramento das soluções, como a reformulação da expressão do gradiente do custo e o uso do método do gradiente projetado.

Fujiwara *et al.* (1987) apresentaram aprimoramentos para o modelo LPG, incorporando um método de busca que aumenta a velocidade de convergência e um método de determinação do tamanho dos passos que acelera a busca na etapa de gradiente. Como resultados, menores custos foram obtidos para os problemas de Alperovits e Shamir (1977).

Morgan e Goulter (1985) desenvolveram um algoritmo baseado em uma formulação de PL ligada a um método de análise hidráulica – Hardy Cross aplicado ao método  $\Delta Q$  (fig. 3.2). Esse método é utilizado para determinação das vazões e pressões a partir de uma *layout* inicial do sistema. A seguir, os diâmetros são alterados heurísticamente com base na sua importância, associada a pesos determinados de acordo com a vazão do trecho. O trecho de menor diâmetro e peso é suprimido. Na PL, a função objetivo é composta pelos custos das tubulações que terão seus diâmetros aumentados ou reduzidos, cujos comprimentos são as variáveis de decisão. Não é necessária a restrição do balanço de energia nos anéis devido ao uso da análise hidráulica. Se a modificação de diâmetros leva a uma redução do custo, o trecho é eliminado; senão, é mantido. A análise hidráulica do novo *layout* resulta em novas vazões, utilizadas no cálculo dos novos pesos dos trechos. A solução ótima (local) é atingida quando não há mais trechos a serem modificados e os pesos são maiores do que um valor especificado. A aplicação ao problema da rede de Nova York resultou em um custo menor do que os reportados anteriormente, apesar do método não dimensionar componentes da rede que não as tabulações (Lansey e Mays, 1989).

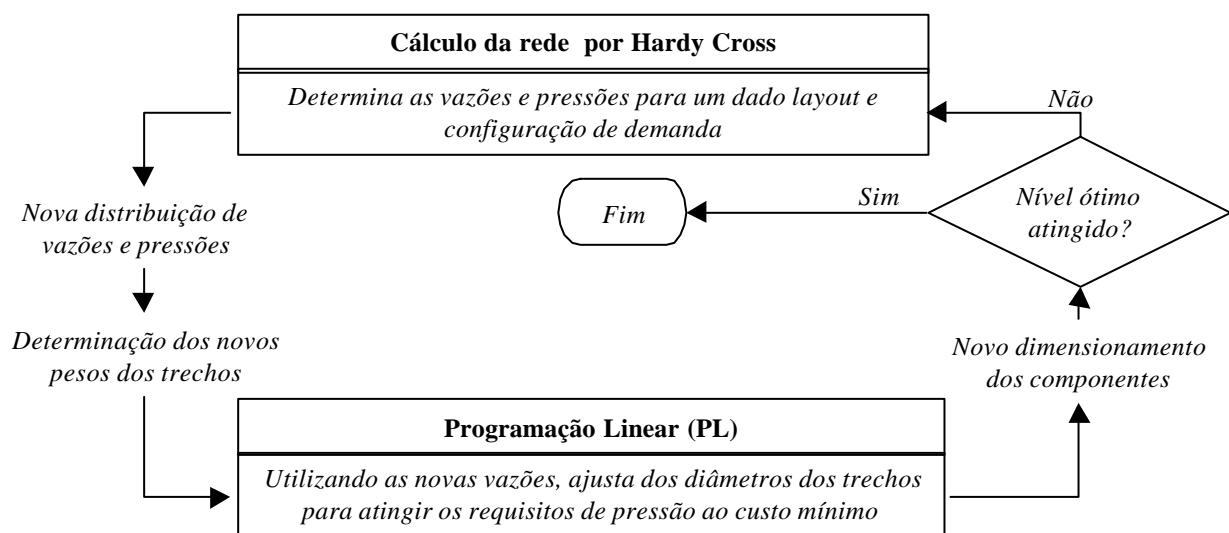


Figura 3.2 – Modelo de otimização de Morgan e Goulter (1985).

Walski *et al.* (1987) comparam quatro modelos de otimização desenvolvidos à época, por meio da aplicação a um problema de uma rede de *layout* conhecido. Foram aplicados uma técnica de enumeração de diâmetros alternativos; uma combinação de um modelo de busca por gradiente para identificar a distribuição ótima de pressões e um modelo de PL para selecionar os diâmetros para cada distribuição de pressão; o método de Morgan e Goulter (1985); e um método de busca. Como resultados, os custos finais ficaram bastante próximos, apesar das soluções se mostrarem completamente diferentes. As seguintes conclusões podem ser citadas:

- Há a necessidade da incorporação de múltiplos cenários e simulações estendidas;
- dimensionamento e locação dos reservatórios afetam a solução;
- Aspectos de performance e confiabilidade devem ser incorporados;
- A simulação sob diversos cenários de demanda leva à formação de anéis na rede;
- Aspectos mais realistas dos sistemas devem ser incorporados para maior praticidade.

Lansey e Mays (1989) também combinaram um método de otimização, agora não linear (GRG2), com um modelo de análise hidráulica da rede – método nodal – em um algoritmo iterativo em 2 passos (fig. 3.3). A função objetivo pode ser composta por funções das variáveis de decisão (diâmetros, capacidades, etc.) e das cargas nos nós, também dadas em função das variáveis de decisão e determinadas pela análise hidráulica. A cada iteração interna, a análise hidráulica determina as cargas e vazões para uma dada condição de demanda, possibilitando o cálculo do gradiente da função objetivo e eliminando as restrições de balanço de energia nos anéis. Termos de penalidade são incorporados utilizando-se multiplicadores de Lagrange, para evitar a violação dos limites de cargas hidráulicas. Assim, com os termos de penalidade fixados, o passo interno utiliza o GRG2 para obter os valores das variáveis de projeto, usadas pela análise hidráulica para determinar cargas e vazões, repassadas ao GRG2. No passo externo, se os limites de carga não são satisfeitos, novos termos de penalidade são calculados, iniciando-se novamente o passo interno. O modelo pode dimensionar sistemas complexos com vários componentes e condições de demanda, mas não atinge o ótimo global e, a menos que uma restrição seja imposta, resulta em redes ramificadas.

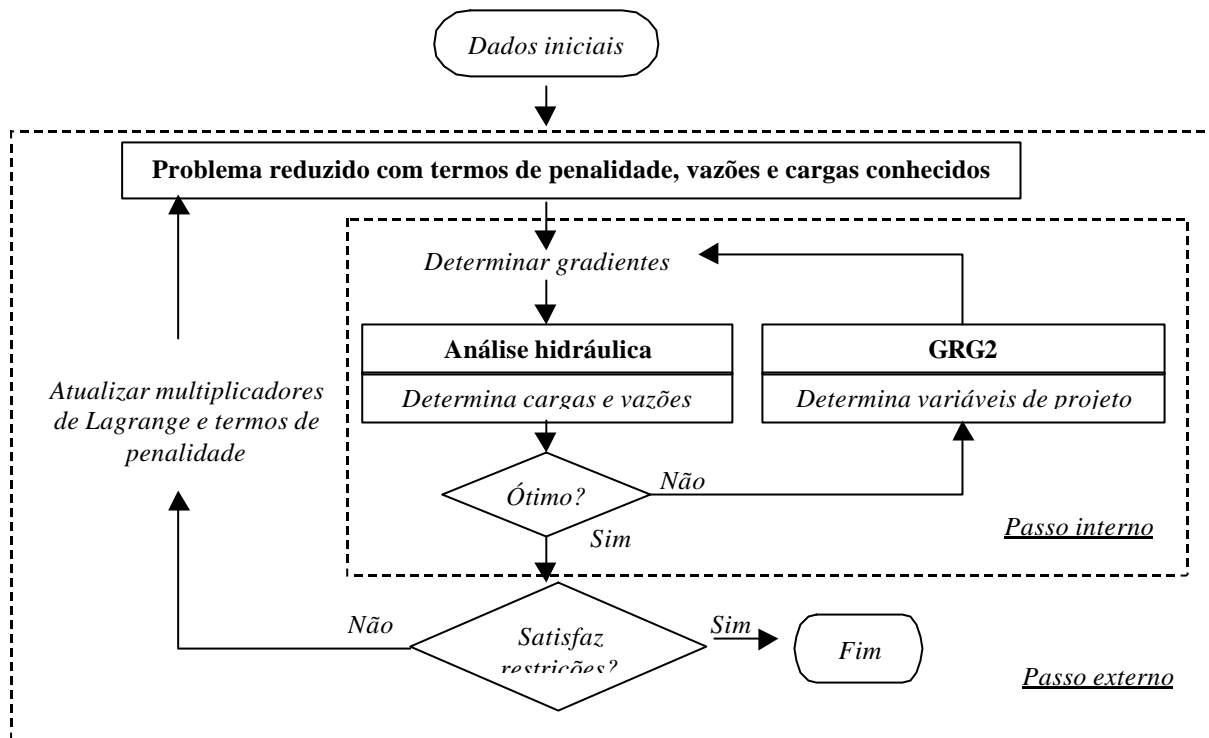


Figura 3.3 – Modelo de otimização de Lansey e Mays (1989).

Walski *et al.* (1990) apresentaram um procedimento de otimização que enumera exaustivamente todas as combinações possíveis de diâmetros e seleciona a de menor custo global, dentro das especificações. As tubulações são divididas em grupos nos quais todos os trechos possuem os mesmos diâmetros. Os diâmetros desses grupos são alterados segundo uma lista de valores comerciais possíveis e a rede é calculada em cada combinação, para verificação das restrições. O método torna-se ineficiente no caso de redes de grande porte.

Fujiwara e Khang (1990) desenvolveram um modelo de decomposição do problema em 2 fases, seguindo as metodologias de decomposição (fig. 3.4). Na primeira fase, o problema de minimização não linear convexo com restrições lineares é formulado e, fixando-se vazões, são determinadas as perdas de carga globalmente ótimas para essa distribuição de vazões. As vazões são, então, alteradas com base nos gradientes da função objetivo obtidos por multiplicadores de Lagrange e fixadas de modo a se obter novas perdas de carga. Na segunda fase, as perdas de carga são fixadas e um problema de minimização não linear côncavo com restrições lineares é formulado para a obtenção de vazões globalmente ótimas para essas perdas de carga. Essas vazões são utilizadas para reiniciar a primeira fase. O método não garante o ótimo global, mas permite uma movimentação de um ótimo local para outro melhor. O modelo é aplicado à rede da cidade de Hanoi, Vietnã e ao problema da rede de Nova York, obtendo-se os melhores resultados disponíveis até então.

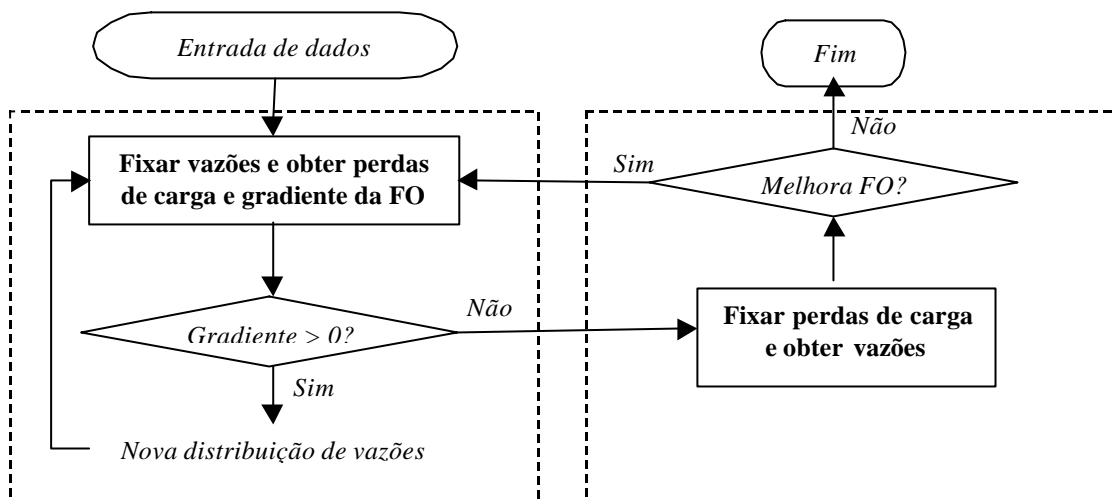


Figura 3.4 - Modelo de otimização de Fujiwara e Khang (1990).

Loganathan *et al.* (1995) apresentaram um algoritmo que busca a solução ótima entre diversos ótimos locais, também decompondo o problema em 2 fases. O problema externo realiza uma busca por distribuições de vazão possíveis e o interno seleciona os diâmetros ótimos dos segmentos de trechos e cargas nos nós, para as distribuições de vazão obtidas. A formulação do problema interno é similar à de Alperovits e Shamir (1977), tornando-se linear a partir do conhecimento das vazões. No problema externo, duas estratégias de busca global são utilizadas. Nessas estratégias, novas distribuições de vazão e respectivas soluções são geradas aleatoriamente com base em distribuições de probabilidades e comparadas com ótimos globais pré-especificados. Nesse procedimento, soluções piores são, também, aceitas, com uma certa probabilidade. O modelo foi aplicado a um exemplo proposto por Alperovits e Shamir (1977) e ao problema da rede de Nova York. No primeiro caso, foi obtida um rede malhada em que certos trechos são de diâmetro mínimo e de custo superior ao encontrado por Eiger *et al.* (1994). No caso da rede de Nova York, os autores argumentam que a solução de Fujiwara e Khang (1990), apesar de melhor, não respeita todas as restrições, e apresentam os melhores resultados da literatura até então.

Mais recentemente, Formiga e Gomes (1999a, 1999b) aplicaram o método GRG2, de uma forma menos elaborada que Shamir (1973, 1974), em um procedimento de otimização em duas fases. Na primeira etapa, o custo a ser minimizado é uma função não linear dos diâmetros de cada trecho, que são as variáveis de decisão. As restrições provêm da conservação de energia nos anéis, continuidade nos nós e limites de velocidade pressão e diâmetros. A segunda etapa visa transformar os diâmetros obtidos em valores comerciais. Para isso, cada trecho é dividido em 2 segmentos de diâmetros comerciais adjacentes aos calcados na primeira etapa, cujos comprimentos são as variáveis de decisão. Uma aplicação é feita à rede de distribuição do bairro do Bessa em João Pessoa/PB, com resultados satisfatórios.

Técnicas alternativas, baseadas na teoria da evolução, denominadas algoritmos genéticos, têm sido utilizadas em diversos problemas de recursos hídricos com vistas à otimização. Os algoritmos são particularmente eficientes na seleção de soluções discretas, por meio das técnicas de evolução (*cross over*), em que características de soluções diferentes são permutadas de modo a se obter novas soluções, e mutação, para alteração de uma solução individual. No caso de redes de distribuição de água, Savic e Walters (1997) e Montesinos *et al.* (1999) apresentaram adaptações de algoritmos genéticos para a obtenção de soluções ótimas, a partir de um grupo inicial de soluções é obtido aleatoriamente. Apesar dos resultados satisfatórios em termos da solução final e do esforço computacional, esses algoritmos não garantem que a solução encontrada é ótima globalmente.

Cunha e Souza (1999) apresentaram um modelo heurístico baseado na analogia com o processo de recozimento (*Simulated Annealing*), no qual o aumento da temperatura dá mobilidade às moléculas; após o esfriamento, as moléculas formam uma estrutura cristalina. No modelo, a temperatura é associada ao custo da rede, que é reduzido até se encontrar a situação de energia mínima correspondente ao estado cristalino. Regras heurísticas e probabilísticas são incorporadas para se determinar a taxa de resfriamento e critérios de parada, evitando ótimos locais. Aplicações aos problemas de Alperovits e Shamir (1977) e à rede de Hanói conduziram a resultados semelhantes aos atingidos por algoritmos genéticos.

Venturini (1997) aplicou a PL na resolução do problema de operação de redes de distribuição, mostrando a possibilidade de se formular diferentes funções objetivo como minimizar a vazão bombeada, maximizar o fornecimento em pontos específicos e minimizar a perda de carga em anéis específicos. Para lidar com equações não lineares, um processo iterativo baseado no método da linearização (item 3.3.3) é utilizado, resultando em um número excessivo de iterações, em relação a métodos tradicionais de análise como Hardy Cross. Entretanto, o método pode ser usado para verificar a adequação de projetos, analisando situações críticas.

Modelos de otimização que resultam em soluções globalmente ótimas foram apresentados por Eiger *et al.* (1994), Sherali e Smith (1997) e Sherali *et al.* (1998), baseados na linearização de restrições e utilização da técnica *Branch and Bound*. Matematicamente, esses métodos são baseados no desenvolvimento apresentado por Ben-Tal *et al.* (1994), que pode ser aplicado a uma forma geral de formulação, composta pela função objetivo linear e restrições não lineares.

A mesma metodologia tem sido aplicada a outros problemas de otimização que seguem a mesma formulação. Procedendo aplicações em problemas afetos da engenharia química,

Zamora *et al.* (1998) apresentam aprimoramentos na técnica *Branch and Bound* para a redução do espaço de soluções viáveis e do número de nós a serem enumerados na árvore.

Uma generalização do método foi proposta por Smith e Pantelides (1999), tornando possível a sua aplicação a diversos problemas de engenharia. Neste trabalho, são apresentadas técnicas de redução do número de nós a serem enumerados e de armazenamento computacional da árvore de busca.

Recentemente, Costa *et al.* (2001) apresentou uma nova formulação do problema de otimização de redes de água, utilizando os conceitos da metodologia de otimização global. Melhores resultados são obtidos em termos de convergência. Por sua vez, Sherali *et al.* (2001) testa aprimoramentos na relaxação das restrições não lineares e na escolha das variáveis de partição, reduzindo o número de nós enumerados e atingindo excelentes resultados, particularmente em redes de maior porte.



### 3.2 CONFIABILIDADE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO

A confiabilidade das redes de distribuição de água é um dos aspectos a serem considerados na avaliação da qualidade do serviço de abastecimento de água. Devido ao seu conceito vago, não existe, ainda, um consenso sobre como mensurar e qual o nível aceitável de confiabilidade de uma rede.

A questão da mensuração da confiabilidade está associada à qualidade e quantidade de água fornecida. A confiabilidade da qualidade da água fornecida é relacionada à presença de substâncias tóxicas e desinfetantes (cloro) e é difícil de ser quantificada, devido às incertezas associadas. A confiabilidade da quantidade de água fornecida pode ser avaliada a partir do atendimento às vazões e pressões requeridas. Essa avaliação também encontra dificuldades, uma vez que o fornecimento de água está sujeito a falhas no sistema, oriundas da variação inesperada da demanda, redução da capacidade de condução e falhas em componentes da rede (obstruções, quedas de energia, etc.). Esses eventos são de natureza aleatória, o que dificulta sua análise.

Devido a essas dificuldades, uma análise completa da confiabilidade requer um excessivo tempo computacional, o que tem levado a simplificações, que tornam a aplicação a sistemas reais limitada. Xu e Goulter (1999) conceituam confiabilidade como a habilidade de o sistema promover o adequado fornecimento de água em condições normais e anormais. Para que um sistema seja confiável, Morgan e Goulter (1985) postulam que cada nó deve estar conectado a dois trechos, no mínimo. Goulter e Coals (1986, *apud* Fujiwara e De Silva, 1990) usam, como medida de confiabilidade, a probabilidade complementar do isolamento de um nó, que corresponde à probabilidade de falha simultânea de todos os trechos conectados a esse nó. Cullinane *et al.* (1992) introduziram o conceito de disponibilidade nodal, que é o período de tempo em que a pressão é maior do que um valor mínimo, e de probabilidade mecânica, que é a probabilidade do sistema estar operacional. Goulter e Bouchart (1990) apresentaram propostas da utilização de restrições relacionadas a probabilidades de atendimento satisfatório das demandas.

Os aspectos de confiabilidade têm sido inseridos no problema de otimização de redes de distribuição na forma de restrições. Goulter e Coals (1986, *apud* Fujiwara e De Silva, 1990) introduziram uma restrição adicional no modelo de Alperovits e Shamir (1977) limitando o número de falhas por ano em cada trecho. Su *et al.* (1987, *apud* Fujiwara e De Silva, 1990) propuseram um método iterativo composto de um modelo de programação não linear, um modelo de análise hidráulica e um modelo de avaliação da confiabilidade.

Wagner *et al.* (1988a) reuniram os métodos analíticos de avaliação da confiabilidade aplicáveis a redes de distribuição de água. São apresentados os conceitos de alcance (*reachability*) e conectividade, referentes à probabilidade de um ponto de demanda estar conectado a uma fonte e à probabilidade de todos os pontos estarem conectados a uma fonte, respectivamente. Essas medidas de confiabilidade são utilizadas para uma avaliação inicial. A cada trecho é associada uma probabilidade de funcionamento e métodos de simplificação da rede são aplicados, resultando em probabilidades individuais para cada nó (alcance) e uma probabilidade para o sistema (conectividade). No caso de redes complexas que não podem ser reduzidas por esse processo, são procedidas divisões em subredes que são combinadas e associadas a probabilidades de isolamento. Também é apresentado um método para a determinação da probabilidade do sistema atingir um nível de vazão específico em cada nó, baseado em algoritmos voltados para redes elétricas. Definidas as capacidades máximas dos trechos, determina-se se uma configuração de falha da rede (dano em um dos trechos) pode atender às demandas. As aplicações demonstraram que a probabilidade de atendimento à demanda é menor do que a probabilidade de todos os nós estarem conectados.

Wagner *et al.* (1988b) apresentaram métodos de simulação estocástica para uma avaliação mais detalhada da confiabilidade das redes. Dentre as vantagens, esses métodos permitem incorporar características mais complexas do sistema e calcular várias medidas de confiabilidade, promovendo uma análise mais realista e flexível, ao custo de maior tempo computacional. O modelo de simulação envolve as partes de geração de eventos de falha e reparo e de solução hidráulica da rede. Partindo-se de uma rede sem falhas, são determinadas as pressões e vazões pela solução hidráulica. A seguir, são gerados tempos para ocorrência de falhas em cada trecho, de acordo com uma distribuição de probabilidades, e os trechos danificados são eliminados. A resolução hidráulica é novamente efetuada para a avaliação da performance do sistema, assumindo-se que as demandas variam de acordo com a pressão. Uma vez que um trecho falha, um tempo de reparo é gerado e a simulação continua, considerando-se o sistema como em “serviço reduzido”, até que o tempo de reparo seja atingido, um reservatório seja esvaziado ou outro trecho falhe. Como medidas de confiabilidade, são calculados intervalos de confiança da deficiência anual de água, tempo gasto no estado de “serviço reduzido” e de falha (para cada nó). Nas aplicações apresentadas, propostas de melhorias no sistema foram testadas, concluindo-se que o dimensionamento dos reservatórios deveria estar relacionado com o tempo de reparo dos trechos para suprimento do sistema durante períodos de falha.

Fujiwara e De Silva (1990) apresentaram um método iterativo heurístico adaptado ao modelo de Alperovits e Shamir (1977). O modelo de otimização é aplicado a uma rede sem falhas resultando em uma configuração ótima (local) e a confiabilidade do sistema resultante é avaliada com base na máxima vazão fornecida em uma situação de falha de um dos trechos. A seguir, uma nova distribuição de vazões é obtida, de modo a aumentar a confiabilidade, e repassada ao modelo de otimização. O processo termina quando um nível aceitável de confiabilidade é atingido. A nova distribuição de vazões é obtida aumentando-se a capacidade do trecho que mais aumenta a confiabilidade a menores custos. Na aplicação a uma rede hipotética, foi possível analisar o acréscimo de custo provocado pelo aumento da confiabilidade.

O trabalho anterior teve continuidade em Fujiwara e Tung (1991), que utilizaram a programação não linear para a avaliação da confiabilidade com base na máxima vazão suprida sob uma dada configuração de falha. Um algoritmo heurístico de alteração de diâmetros é proposto, baseando-se nos gradientes de custo e confiabilidade para determinar-se o aumento de diâmetro que acarreta menor custo.

Park e Liebman (1993) aplicaram uma medida de confiabilidade como uma restrição ao modelo de Quindry *et al.* (1981). Tal medida é relacionada com a expectativa de deficiência, resultante do produto da probabilidade de falha pela deficiência, em termos da fração da demanda fornecida em cada nó. Assumindo-se que apenas um trecho é danificado por vez, uma restrição de fração mínima da demanda a ser atendida, associada à expectativa de deficiência, é adicionada ao modelo de Quindry *et al.* (1981). As aplicações demonstraram que a redução da fração mínima da demanda a ser atendida causa um aumento do custo e redução da deficiência esperada. Essas variações são menores em nós centrais. O esforço computacional aumenta no caso de múltiplas configurações de demanda e falhas.

Kansal *et al.* (1995) ressaltaram que a análise da confiabilidade em países em desenvolvimento deve privilegiar os aspectos de conectividade dos consumidores e garantia de fornecimento de água, ainda que em condições insatisfatórias, em detrimento da qualidade do serviço em termos de pressões. Em seu trabalho, propuseram um índice de conectividade global da rede, que pode ser calculado sem avaliações nodais.

Gupta e Bhave (1994, 1996) apresentaram um modelo de análise de confiabilidade baseado em fatores de performance nodais calculados em função do volume de água disponível durante um certo período de tempo em que a rede é simulada. A confiabilidade da rede, calculada com base nos fatores nodais, é aumentada por meio de um algoritmo iterativo de

alteração de diâmetros. Esse algoritmo promove as alterações nos trechos em que são melhores as variações marginais de confiabilidade em relação ao custo.

Xu e Goulter (1998) propuseram um método de dois estágios capaz de integrar as contribuições de confiabilidade oriundas de falhas em componentes e de variação da demanda em uma medida única. No primeiro estágio, enquanto a configuração da rede é fixa, as demandas variam e a performance é avaliada por um modelo hidráulico probabilístico. No segundo estágio, as probabilidades de ocorrência de cada configuração e nível de demanda são integradas com a avaliação da performance, resultando em índices de confiabilidade. O modelo hidráulico probabilístico considera demandas, níveis em reservatórios e rugosidades como variáveis aleatórias e lineariza o sistema de equações por meio da expansão em série de Taylor. A confiabilidade nodal é definida como a probabilidade de um nó receber a vazão requerida a uma pressão igual ou maior a um valor mínimo, calculada com base nos valores esperados e variâncias das variáveis aleatórias. A probabilidade de ocorrência de uma certa configuração a um nível de demanda é determinada pelo produto das probabilidades de disponibilidade dos trechos (dados históricos de falhas em um único trecho) e de ocorrência do nível de demanda, isoladamente. A probabilidade de um nó falhar é dada pela combinação dessas duas probabilidades com a probabilidade de falha na configuração e nível de demanda especificados. A confiabilidade do nó é o complemento da probabilidade de falha. A aplicação a uma rede hipotética mostrou que a aleatoriedade das variáveis é importante e não considerá-la significa superestimar a confiabilidade.

Fujiwara e Li (1998) relacionaram os fatores de equidade de fornecimento, gerenciamento da rede e fornecimento de demanda dependente da pressão nodal em um modelo de programação matemática para analisar o comportamento do sistema. A equidade de distribuição de demandas quando ocorre alguma falha, é atingida por um procedimento de dois estágios. O primeiro estágio busca maximizar o fornecimento ao nó de menor demanda via programação não linear, garantindo o fornecimento a todos os nós acima de um valor mínimo. As restrições são relacionadas com os fornecimentos nos outros nós, perda de carga máxima nos trechos, limites de pressões e balanço de massa global e em cada nó. A taxa de suprimento em cada nó varia com a pressão, de acordo com uma função diferenciável em termos de pressões máxima, mínima e atuante. As variáveis de decisão são as pressões nodais, vazões e velocidades das bombas e taxas de suprimento das demandas nodais. Como esse problema pode ter várias soluções, na segunda etapa é selecionada a solução que maximiza a taxa de fornecimento em relação à demanda, que é uma medida de confiabilidade. Na aplicação a uma rede hipotética, verificou-se que os nós

com menos trechos conectados obtiveram menor taxa de suprimento e que quanto maior o número de trechos danificados, mais significativo é o papel da condição de equidade. Em nenhum momento é considerado o custo, mas pode-se levantar uma função utilidade dos consumidores e promover uma análise custo benefício.

Tanyimboh *et al.* (1998) propuseram uma abordagem que calcula confiabilidades nodais com base na relação entre vazões disponíveis e requeridas, em que as primeiras são determinadas a partir das cargas hidráulicas nos nós. Por meio de desenvolvimento matemático, conseguiram provar que a confiabilidade global da rede pode ser determinada a partir das confiabilidade obtidas em cada nó.

Xu e Goulter (1999) apresentaram uma nova abordagem capaz de aliar incertezas nas demandas nodais e capacidades hidráulicas dos trechos, assim como os efeitos de falhas mecânicas dos componentes, na otimização baseada na confiabilidade da rede. As falhas são associadas a pressões insuficientes e a confiabilidade é definida como a probabilidade da demanda nodal ser atendida sob uma pressão maior ou igual a um valor mínimo para uma configuração fixa da rede sob demandas e rugosidades aleatórias. A determinação da confiabilidade é feita a partir de uma função de performance do sistema, em termos das variáveis aleatórias, que define uma superfície de falha. As aplicações mostraram que quanto maior a variabilidade dos parâmetros, maior é o nível de redundância requerido para atingir a confiabilidade desejada e maior o custo. Por fim, algumas variáveis consideradas independentes estatisticamente, como a demanda, na verdade são dependentes.

Gargano e Pianese (2000) desenvolveram uma análise de confiabilidade baseada na característica probabilística das demandas. Por meio do método de Monte Carlo, diversas configurações de demandas são geradas com base em parâmetros estatísticos conhecidos e índices de confiabilidade são calculados a partir do comportamento hidráulico da rede. A confiabilidade do sistema é obtida pela média ponderada dos índices em cada configuração de demanda, definidos como a probabilidade da rede operar de forma satisfatória.

## 4. METODOLOGIA

De modo geral, a metodologia do trabalho está calcada na implementação e desenvolvimento de algoritmos computacionais para obtenção de projetos com custo ótimo de implantação e para avaliação da confiabilidade de redes de distribuição de água. Para tanto, pesquisa bibliográfica é realizada inicialmente para selecionar modelos existentes e orientar o desenvolvimento dos algoritmos. Após implementação e adaptação, os modelos são aplicados a exemplos e casos reais a fim de avaliar suas performances.

A figura 4.1 representa a metodologia seguida, dividida em quatro fases de forma esquemática. Na fase inicial, é desenvolvida pesquisa bibliográfica sobre os diversos métodos usados em estudos de otimização e confiabilidade de redes de distribuição. Em uma segunda fase, os modelos de otimização e confiabilidade são implementados, promovendo-se testes em problemas da literatura. Na terceira fase, os modelos são adaptados para que suas eventuais deficiências sejam supridas. Na quarta fase, os modelos são aplicados a redes existentes, promovendo-se análises de sensibilidade, avaliando-se as relações existentes entre custos de implantação e confiabilidade dos sistemas e confrontando-se os resultados da otimização global com os projetos originais.

Em relação à redução do custo de implantação, a pesquisa bibliográfica é orientada para a seleção de modelos de minimização de custos que possam ser adaptados a situações particulares. Considerando-se o atual estado da arte dessa linha de pesquisa e os objetivos deste trabalho, os modelos estudados encontram aplicação no dimensionamento de tubulações de redes desprovidas de elementos como válvulas e bombas. A seleção do modelo é efetuada com base na eficácia da busca pela solução ótima, capacidade de adaptação a situações particulares, eficiência computacional e facilidade de implementação.

As seguintes diretrizes gerais da implementação do modelo de otimização podem ser citadas:

- O *layout* das redes e variáveis como comprimento de trechos, elevação do terreno nos nós, demanda nos nós e elevação do reservatório são considerados conhecidos e fixos;
- A função objetivo é o custo total de implantação da rede, a ser minimizado;
- As variáveis de decisão a serem otimizadas são os diâmetros das tubulações ou os segmentos de diâmetro comercial conhecido que compõem cada trecho;
- Parâmetros operacionais, como nível de reservatórios e regras de operação de válvulas, não são otimizados;
- O processo de otimização considera o regime de escoamento permanente.

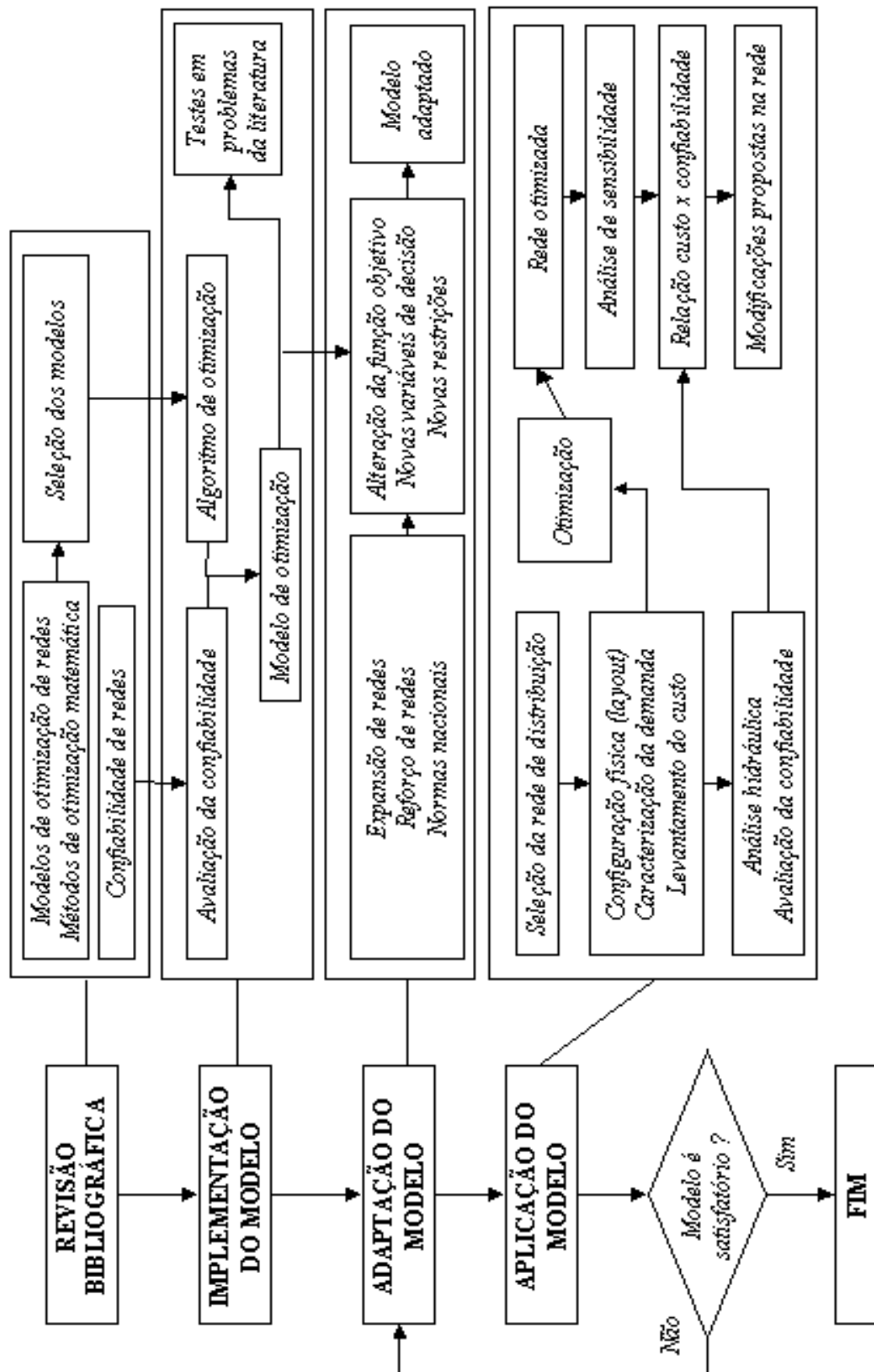


Figura 4.1 – Fluxograma representativo da metodologia de trabalho.

Na implementação de todos os modelos são utilizadas a linguagem de programação Fortran 90 e o compilador comercial desenvolvido pela *Salford Software Ltd.* Como exigido pelo modelo selecionado, o código desenvolvido é acoplado a uma subrotina de resolução de problemas de programação linear. Dentre as diversas disponíveis, foi utilizada versão acadêmica da *Optimization Solution and Library* – OSL versão 3.0, desenvolvida pela IBM e disponível em arquivo de formato DLL (*Dynamic Link Library*). Trata-se de uma subrotina eficiente do ponto de vista computacional por ser capaz de lidar com problemas de grande porte (muitas variáveis e restrições) e com dificuldades numéricas.

Para o uso do modelo é necessário que vazões máximas e mínimas nos trechos da rede sejam especificados previamente. Para determinar essas vazões é formulado um problema de programação não linear que deve ser resolvido para cada trecho da rede. Para resolução desse problema, é utilizada a ferramenta *Solver* do *Excel*<sup>®</sup>, baseado no algoritmo GRG2 de programação não linear. Essa ferramenta possui limitações em relação ao número de variáveis e restrições que podem comprometer a aplicação a redes de grande porte.

Com o modelo implementado, adaptações são incorporadas para adequação a casos especiais e a características das rede brasileiras. Um desses casos trata da expansão de redes existentes, em que alguns trechos têm diâmetro conhecido e fixo e as variáveis de decisão referem-se à parte da rede a ser expandida. Um outro caso trata de redes a serem reforçadas pela disposição de novas tubulações em paralelo a existentes. Em ambos, adaptações nas restrições e na função objetivo são efetuadas, assim como adequações dos resultados obtidos. Parâmetros nacionais de projeto de redes, definidos pela norma NBR 12.218 (ABNT, 1994), são incorporados por meio dos dados de entrada de cada problema como, por exemplo, cargas hidráulicas mínimas e máximas em cada nó. Por outro lado, devido a imposições construtivas, cada trecho da rede, em geral, deve ser constituído por tubulações de um mesmo diâmetro.

Quanto ao modelo de confiabilidade, a revisão bibliográfica é guiada pelas experiências na aplicação de conceitos já estabelecidos em redes de distribuição. Em linhas gerais, o modelo deve analisar a performance hidráulica sob situações anormais de funcionamento e associá-la a índices matemáticos. Apesar de existirem diversos modelos disponíveis na literatura, não há consenso sobre suas vantagens, abrindo espaço para o desenvolvimento de modelos adaptados a cada situação particular.

O modelo de confiabilidade é desenvolvido a partir da simulação do comportamento hidráulico da rede sob diversas configurações de falha, ou seja, situações em que trechos são colocados fora de operação. A simulação é procedida por meio de um modelo hidráulico



nodal, resolvido pelo método de Newton-Raphson. O modelo hidráulico convencional é incrementado para lidar com situações de cargas negativas e trechos fora de operação, fornecendo cargas hidráulicas e vazões máximas disponíveis para consumo nos nós. Esses parâmetros são utilizados na definição de funções de performance hidráulica em cada nó. A extensão da performance para a rede é realizada pela média ponderada pelas demandas nodais e o índice de confiabilidade é obtido a partir das probabilidades de ocorrência de cada configuração de falha.

Além da mensuração da confiabilidade, o modelo é empregado em algoritmos que avaliam as relações entre custo, confiabilidade e capacidade da rede. Assim, a partir da rede de ótimo custo, a capacidade hidráulica pode ser incrementada e seu efeito sobre a confiabilidade e custo do sistema pode ser avaliada. Da mesma forma, relações entre a variação de demandas nodais e confiabilidade da rede podem ser analisadas.

Efetuada as adaptações necessárias, a fase de aplicação dos modelos pode ter início. As aplicações são conduzidas em redes que permitem avaliar o desempenho dos modelos e de suas adaptações. Assim, as aplicações são realizadas em projetos de expansão de redes, com a possibilidade de reforço de trechos em alguns casos.

A aplicação mais completa se dá por meio da rede da Vila Paranoá do Distrito Federal. Essa escolha se deve à disponibilidade de dados, ao porte médio da rede e às suas características particulares, como a existência de uma parte fixa da rede e a possibilidade de disposição de trechos em paralelo. De forma geral, para a caracterização da rede, são necessários dados sobre a configuração (número de nós, trechos e anéis, características hidráulicas dos trechos e elevação dos nós) e as demandas nos nós. O custo da rede é comparado com o real, obtido por estimativas.

A seguir, é analisada a sensibilidade dos resultados por meio da variação das configurações de demanda e parâmetros de projeto, avaliando-se a relação existente entre o custo e a confiabilidade da rede. Com base nessa análise, propostas de modificações estruturais na rede podem ser produzidas.

A aplicação a um problema real também é útil na avaliação do modelo e identificação de falhas. Essas falhas poderão ser eliminadas e uma nova aplicação, à mesma rede real, poderá ser efetuada. Entretanto, de acordo com a importância, essas falhas podem resultar em restrições à aplicação do modelo, não sendo possível a eliminação das mesmas.

## 5. OTIMIZAÇÃO GLOBAL DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO

Neste capítulo são apresentadas a formulação do modelo de otimização global adotado, aplicado à implantação de redes, e suas adaptações para o caso de expansão de redes existentes, com a possibilidade da implantação de trechos paralelos.

### 5.1 O MODELO DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL

Segundo os fundamentos matemáticos apresentados por Ben-Tal *et al.* (1994), o dual e o primal de um problema de otimização não convexo, em que as variáveis de decisão estão restritas a um intervalo de valores, possuem soluções distintas. Quando o intervalo de valores, definido por limites inferiores e superiores, é dividido, novos problemas de otimização são formulados, com as variáveis de decisão restritas a novos sub-intervalos de valores. Nesses problemas, a diferença entre as soluções do dual e do primal tende a ser menor. À medida que o intervalo inicial de valores é dividido em sub-intervalos, novas soluções são encontradas até que o ótimo global é encontrado, quando a diferença entre o dual e o primal é nula.

As relações entre o dual e o primal são ilustradas nas equações 5.1 abaixo. Segundo Sherali *et al.* (1998), o problema dual pode ser substituído por uma relaxação do problema primal, em que as restrições não lineares são aproximadas por funções que ampliam a região de soluções possíveis. A solução do problema relaxado representa um limite inferior da solução do problema original, no problema de minimização, e um limite superior, no problema de maximização.

$$\text{Minimização:} \quad Z(S)_{dual} \leq Z(S1)_{dual} \leq Z(S1)_{primal} \leq Z(S)_{primal} \quad (5.1a)$$

$$\text{Maximização:} \quad Z(S)_{dual} \geq Z(S1)_{dual} \geq Z(S1)_{primal} \geq Z(S)_{primal} \quad (5.1b)$$

Em que:

$Z(S)_{dual}$  : Solução do problema dual no intervalo S;

$Z(S)_{primal}$  : Solução do problema primal no intervalo S;

S : Intervalo original que restringe variáveis de decisão;

S1 : Sub-intervalo resultante da divisão do intervalo S.

### 5.1.1 Variáveis

Seguindo da representação tradicional de redes malhadas, em que as demandas são concentrados em nós, admite-se que cada trecho é composto por vários segmentos de características hidráulicas e custo unitário conhecidos, como mostra a figura 5.1. Dessa forma, as variáveis de decisão são os comprimentos de cada segmento e o custo de cada trecho é expresso pela soma dos custos de cada segmento. A perda de carga em cada trecho é dada pela soma das perdas de carga dos segmentos que o compõem.

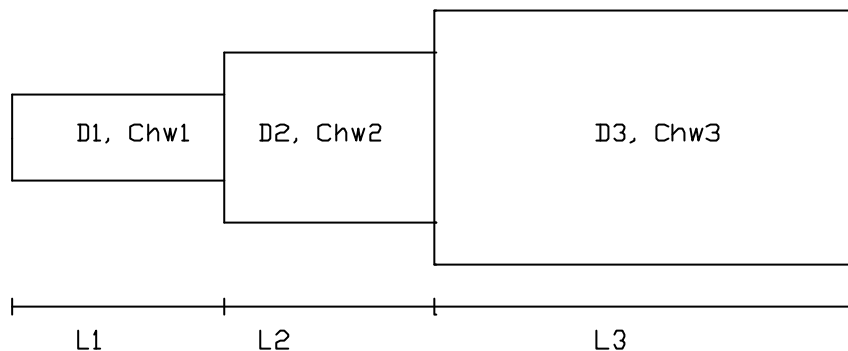


Figura 5.1 – Trecho composto por três segmentos com características hidráulicas distintas.

Também são consideradas variáveis de decisão a vazão em cada trecho e a carga hidráulica em cada nó. Vazões assumem valores positivos quando o fluxo se dá do nó  $i$  para o nó  $j$ , em que  $i < j$ , e negativos quando o fluxo se dá de  $j$  para  $i$ . Em cada nó, os suprimentos são representados por demandas positivas e os consumos por demandas negativas.

### 5.1.2 Formulação do problema

De uma forma geral, o problema de minimização do custo de implantação de uma rede pode ser formulado como nas equações 5.2. A equação 5.2a é a função objetivo e representa a soma dos custos de cada trecho, dados em função dos comprimentos de seus segmentos. As restrições 5.2b representam a conservação de energia, garantindo que a perda de carga em cada trecho seja igual à diferença entre as cargas piezométricas dos seus nós. As restrições 5.2c representam o balanço de fluxo em cada nó. As equações 5.2d, 5.2e e 5.2f impõem limites mínimos e máximos às cargas hidráulicas, diâmetros e vazões. Deve-se destacar que as restrições 5.2b e 5.2d garantem a conservação de energia nos anéis da rede.

$$\min \sum_{(i,j) \in T} FC_{ij}(x_{ijk}) \quad (5.2a)$$

sujeito a:

$$\Delta H_{ij}(Q_{ij}, x_{ijk}) = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \quad (5.2b)$$

$$\sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ij} - \sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ji} = W_i \quad \forall (i) \in N \quad (5.2c)$$

$$z \min_i \leq (H_i + z_i) \leq z \max_i \quad \forall (i) \in N \quad (5.2d)$$

$$0 \leq x_{ijk} \leq L_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.2e)$$

$$Q \min_{ij} \leq Q_{ij} \leq Q \max_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.2f)$$

Em que:

$x_{ijk}$  : comprimento do segmento de diâmetro  $k$  do trecho  $ij$  [L];

$FC_{ij}(x_{ijk})$  : custo do comprimento dos segmentos de trecho  $ij$  [L];

$Q_{ij}$  : vazão no trecho  $ij$  [L<sup>3</sup>T<sup>-1</sup>];

$\Delta H_{ij}(Q_{ij}, x_{ijk})$  : perda de carga no trecho  $ij$  [L];

$H_i$  : carga hidráulica no nó  $i$  [L];

$z_i$  : elevação do terreno no nó  $i$  [L];

$W_i$  : demanda no nó  $i$  [L<sup>3</sup>T<sup>-1</sup>];

$z \min_i$  : cota piezométrica mínima no nó  $i$  [L];

$z \max_i$  : cota piezométrica máxima no nó  $i$  [L];

$L_{ij}$  : comprimento do trecho  $ij$  [L];

$T$  : conjunto de todos os trechos da rede;

$N$  : conjunto de todos os nós da rede.

$NN$  : número total de nós da rede.

A função objetivo na forma como é apresentada na equação 5.2a é não linear. O artifício de usar comprimentos de segmentos de trechos como variáveis de decisão, apresentado por Alperovits e Shamir (1977), torna a função objetivo linear e foi incorporado em diversos modelos (Kessler e Shamir (1989), Eiger *et al.* (1994), Sherali e Smith (1997), Sherali *et al.* (1998), Costa *et al.* (2001), Sherali *et al.* (2001)). A forma específica da função objetivo representando o somatório dos custos dos trechos, é apresentada na equação 5.3.

$$\min \sum_{(i,j) \in T} FC_{ij}(x_{ijk}) = \min \left[ \sum_{(i,j) \in T} \sum_{k=1}^{NK} (C_k \cdot x_{ijk}) \right] \quad (5.3)$$

Em que:

$C_k$  : Custo unitário do segmento de diâmetro  $k$  do trecho  $ij$ ;

$NK$  : Número total de diâmetros possíveis.

Nas restrições 5.2b, a perda de carga pode ser expressa por qualquer equação que represente a relação entre a perda de carga na tubulação e a vazão, para um determinado diâmetro e coeficiente de resistência. Para fins de aplicação da formulação, foi utilizada a equação de Hazen Williams (2.6), assumindo-se a forma específica da equação 5.4.

$$\Delta H_{ij}(Q_{ij}, x_{ij}) = \sum_{k=1}^{NK} 10,66 \cdot \frac{\text{sinal}(Q_{ij}) \cdot |Q_{ij}|^{1,852} \cdot x_{ijk}}{Chw_k^{1,852} \cdot D_k^{4,87}} = \sum_{k=1}^{NK} \text{sinal}(Q_{ij}) \cdot |Q_{ij}|^{1,852} \cdot \mathbf{a}_k \cdot x_{ijk} \quad (5.4)$$

Em que:

$Chw_k$  : coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams referente ao tubo de diâmetro  $k$ ;

$D_k$  : diâmetro do segmento de trecho  $k$  [L];

$k$  : numeração do segmento de trecho;

$\alpha_k$  : coeficiente de resistência da tubulação de diâmetro  $k$  ( $= 10,66 \cdot Chw_k^{-1,852} \cdot D_k^{-4,87}$ ).

Como a equação 5.4 é não linear, as restrições que representam a conservação de energia nos trechos (5.3b) tornam a região de soluções viáveis não convexa, impedindo o uso de técnicas de programação linear. Por outro lado, no uso de técnicas de programação não linear não há garantias de que a solução encontrada constitui o ótimo global do problema. Para linearização da equação 5.4, o termo não linear  $Q_{ij}^{1,852}$  é substituído pela função  $V_{ij}(Q_{ij})$ , dada pela equação 5.5.

$$V_{ij}(Q_{ij}) = \text{sinal}(Q_{ij}) \cdot |Q_{ij}|^{1,852} = \mathbf{q}_{ij} \cdot V_{\min_{ij}} + (1 - \mathbf{q}_{ij}) \cdot V_{\max_{ij}} \quad (5.5)$$

Em que:

$V_{ij}(Q_{ij})$  : função utilizada para linearizar o termo  $Q_{ij}^{1,852}$ , referente ao trecho  $ij$ ;

$\mathbf{q}_{ij}$  : variável de valor entre 0 e 1, dado em função de  $Q_{ij}$ , referente ao trecho  $ij$ ;

$V_{\min_{ij}}$  : valor mínimo de  $V_{ij}$ , referente a  $V_{ij}(Q_{\min_{ij}}) = \text{sinal}(Q_{ij}) \cdot |Q_{\min_{ij}}|^{1,852}$ ;

$V_{\max_{ij}}$  : valor máximo de  $V_{ij}$ , referente a  $V_{ij}(Q_{\max_{ij}}) = \text{sinal}(Q_{ij}) \cdot |Q_{\max_{ij}}|^{1,852}$ .

A incorporação da função  $V_{ij}(Q_{ij})$  à equação 5.4 e à restrição de conservação de energia (5.2b) leva ao desenvolvimento apresentado na equação 5.6.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{NK} V_{ij}(\mathcal{Q}_{ij}) \cdot \mathbf{a}_{ijk} \cdot x_{ijk} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \Rightarrow \\
& \sum_{k=1}^{NK} [\mathbf{q}_{ij} \cdot V \min_{ij} + (1 - \mathbf{q}_{ij}) \cdot V \max_{ij}] \cdot \mathbf{a}_{ijk} \cdot x_{ijk} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \Rightarrow \\
& \sum_{k=1}^{NK} V \min_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ijk} \cdot \mathbf{q}_{ij} \cdot x_{ijk} + \sum_{k=1}^{NK} V \max_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ijk} \cdot (1 - \mathbf{q}_{ij}) \cdot x_{ijk} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

A equação 5.6 ainda apresenta os termos não lineares  $\mathbf{q}_{ij} \cdot x_{ijk}$  e  $(1 - \mathbf{q}_{ij}) \cdot x_{ijk}$ , que são substituídos pelas novas variáveis de decisão  $u_{ijk}$  e  $y_{ijk}$ , respectivamente, incorporadas na função objetivo. A relação entre essas variáveis pode ser expressa pela equação 5.7. Essas novas variáveis são incorporadas na função objetivo (5.3) e na restrição de conservação de energia (5.6), de modo a estruturar o problema na forma das equações 5.8.

$$x_{ijk} = u_{ijk} + y_{ijk} \tag{5.7}$$

$$\min \left[ \sum_{(i,j) \in T} \sum_{k=1}^{NK} C_k \cdot (u_{ijk} + y_{ijk}) \right] \tag{5.8a}$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{NK} V \min_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ijk} \cdot u_{ijk} + \sum_{k=1}^{NK} V \max_{ji} \cdot \mathbf{a}_{ijk} \cdot y_{ijk} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \tag{5.8b}$$

$$\sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} \mathcal{Q}_{ij} - \sum_{j=1, (i,j) \notin T}^{NN} \mathcal{Q}_{ji} = W_i \quad \forall (i) \in N \tag{5.8c}$$

$$\sum_{k=1}^{NK} (u_{ijk} + y_{ijk}) = L_{ij} \quad \forall (ij) \in T \tag{5.8d}$$

$$\sum_{k=1}^{NK} u_{ijk} = \mathbf{q}_{ij} \cdot L_{ij} \quad \forall (ij) \in T \tag{5.8e}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{ij} = \text{sinal} & \left[ \mathbf{q}_{ij} \cdot V \min_{ij} + (1 - \mathbf{q}_{ij}) \cdot V \max_{ij} \right] \cdot \left[ \mathbf{q}_{ij} \cdot V \min_{ij} + (1 - \mathbf{q}_{ij}) \cdot V \max_{ij} \right]^{1/1,852} \\
& \forall (ij) \in T \tag{5.8f}
\end{aligned}$$

$$z \min_i \leq (H_i + z_i) \leq z \max_i \quad \forall (i) \in N \tag{5.8g}$$

$$Q \min_{ij} \leq \mathcal{Q}_{ij} \leq Q \max_{ij} \quad \forall (ij) \in T \tag{5.8h}$$

$$u_{ijk} \geq 0 \quad \forall (ij) \in T \quad k=1, \dots, NK \tag{5.8i}$$

$$y_{ijk} \geq 0 \quad \forall (ij) \in T \quad k=1, \dots, NK \tag{5.8j}$$

### 5.1.3 Relaxação

O processo de relaxação consiste em substituir as equações não lineares 5.8f por inequações lineares, de modo a ampliar o espaço de soluções possíveis. O problema linear resultante pode ser resolvido globalmente por técnicas de programação linear, gerando, como solução, um limite inferior ao problema original, dado pelas equações 5.7.

A relação entre as variáveis  $Q_{ij}$  e  $q_{ij}$ , expressa pelas equações 5.7f, é ilustrada nas figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Segundo as equações 5.7f, a solução exata do problema deve resultar em pares de valores  $Q_{ij}$  e  $q_{ij}$  que estejam sobre as curvas das figuras. A substituição dessas equações por inequações permite que pares de valores  $Q_{ij}$  e  $q_{ij}$  estejam dentro da área entre as retas que suportam as curvas, resultando em soluções aproximadas, que constituem limites inferiores às soluções exatas.

De acordo com os sinais dos limites máximos e mínimos da vazão em um determinado trecho, a relação entre as variáveis  $Q_{ij}$  e  $q_{ij}$  pode enquadrar-se em três casos. O primeiro caso refere-se à situação em que o sentido da vazão no trecho não é conhecido, assumindo um limite mínimo negativo e um limite máximo positivo. No segundo caso, o sentido de fluxo é conhecido e ambos os limites de vazão são positivos, enquanto que no terceiro caso, ambos são negativos.

#### **Caso 1 : $Q_{min_{ij}} < 0$ e $Q_{max_{ij}} > 0$**

Neste caso, a função  $Q_{ij}(q_{ij})$  (eq 3.7f), assume a configuração ilustrada na figura 5.2 e a relaxação é feita pela introdução das equações 5.9 e 5.11, que representam limites superiores à função  $Q_{ij}(q_{ij})$ , e das equações 5.10 e 5.12, que representam limites inferiores à função  $Q_{ij}(q_{ij})$ . As equações 5.11 e 5.12 representam as retas tangentes à curva nos pontos em que a vazão assume os valores máximo  $Q_{max_{ij}}$  e mínimo  $Q_{min_{ij}}$ , respectivamente. As equações 5.9 e 5.10 representam as retas de mesma inclinação da curva e que passam pelos pontos em que  $Q_{ij} = Q_{min_{ij}}$  e  $Q_{ij} = Q_{max_{ij}}$ , respectivamente.

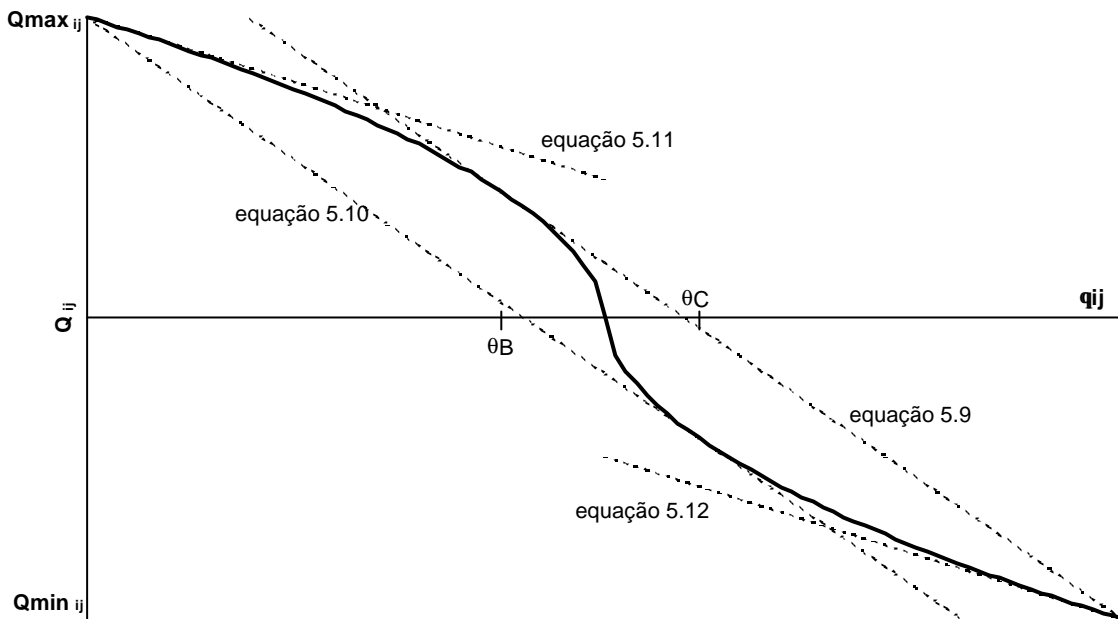


Figura 5.2 – Caso 1 da relação entre Q e  $\theta$ .

$$Q_{ij} \leq Q_{ij}(qB) + (q_{ij} - qB) \cdot Q'_{ij}(qB) \quad (5.9)$$

$$Q_{ij} \geq Q_{ij}(qC) + (q_{ij} - qC) \cdot Q'_{ij}(qC) \quad (5.10)$$

$$Q_{ij} \leq Q \max_{ij} + q_{ij} \cdot Q'_{ij}(0) \quad (5.11)$$

$$Q_{ij} \geq Q \min_{ij} + (q_{ij} - 1) \cdot Q'_{ij}(1) \quad (5.12)$$

A inclinação das retas 5.9 e 5.10 são as mesmas da curva nos pontos  $qB$  e  $qC$ . Esses pontos de tangência são aqueles que satisfazem as equações 5.13 e 5.14, deduzidas a partir das condições de contorno. Os valores de  $qB$  e  $qC$  que satisfazem essas equações podem ser obtidos pelo método da bissecção.

$$Q \min_{ij} - Q_{ij}(qB) - (1 - qB) \cdot Q'_{ij}(qB) = 0 \quad (5.13)$$

$$Q \max_{ij} - Q_{ij}(qC) + qC \cdot Q'_{ij}(qC) = 0 \quad (5.14)$$

Na resolução das equações 5.13 e 5.14, pode ocorrer a situação em que os valores  $qB$  ou  $qC$  não existem no intervalo de 0 a 1, como ilustrado nas figuras 5.3 e 5.4. No caso em que  $qB$  não existe, a restrição 5.9 é substituída pela restrição 5.15 e a restrição 5.11 é omitida, no caso em que  $qC$  não existe, a restrição 5.10 é substituída pela restrição 5.16 e a restrição 5.12 é omitida.



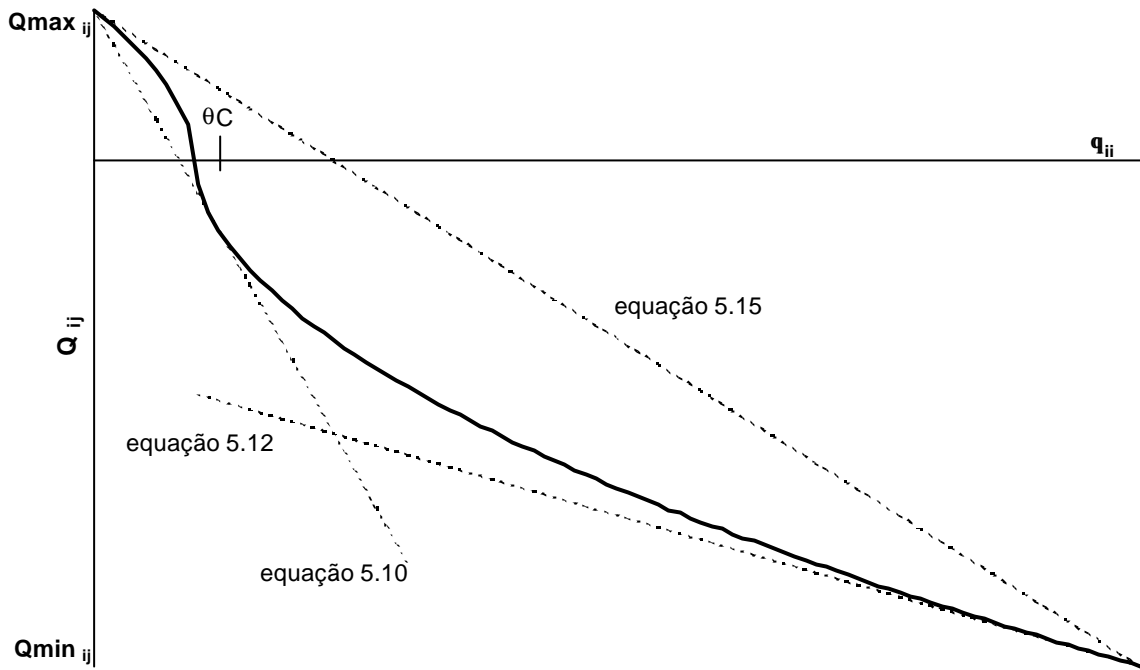


Figura 5.3 – Caso1 da relação entre Q e  $\theta$ , na inexistência de  $q_B$ .

$$Q_{ij} \leq Q_{ij}(0) + q_{ij} \cdot (Q_{\min_{ij}} - Q_{\max_{ij}}) \quad (5.15)$$

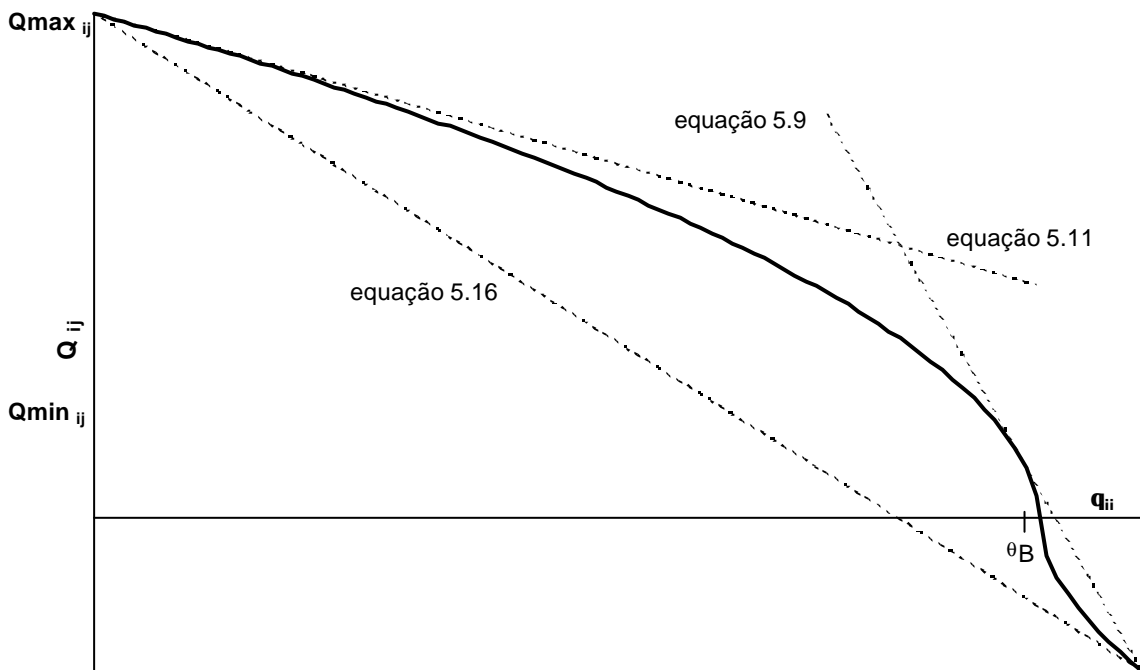


Figura 5.4 – Caso 1 da relação entre Q e  $\theta$ , na inexistência de  $q_C$ .

$$Q_{ij} \geq Q_{ij}(1) + (q_{ij} - 1) \cdot (Q_{\min_{ij}} - Q_{\max_{ij}}) \quad (5.16)$$

### Caso 2 : $Q_{min_{ij}} > 0$

Neste caso, o sentido de fluxo no trecho é conhecido e é igual ao sentido convencional na numeração dos nós, ou seja, do nó  $i$  para o nó  $j$ , em que  $i < j$ . A função  $Q_{ij}(q_{ij})$  (eq 3.7f) assume a forma apresentada na figura 5.5 e é relaxada pela introdução da equação 5.17, representando o limite inferior, e das equações 5.18, 5.19 e 5.20, representando os limites superiores. A equação 5.17 refere-se à reta que passa pelos pontos em que  $Q_{ij} = Q_{min_{ij}}$  e  $Q_{ij} = Q_{max_{ij}}$ . As equações 5.18, 5.19 e 5.20 referem-se às retas tangentes à curvas nos pontos em que  $q_{ij} = 0$ ,  $q_{ij} = 0,5$  e  $q_{ij} = 0,9$ .

$$Q_{ij} \geq q_{ij} \cdot Q_{min_{ij}} + (1 - q_{ij}) \cdot Q_{max_{ij}} \quad (5.17)$$

$$Q_{ij} \leq Q_{ij}(0) + q_{ij} \cdot Q'_{ij}(0) \quad (5.18)$$

$$Q_{ij} \leq Q_{ij}(0,5) + (q_{ij} - 0,5) \cdot Q'_{ij}(0,5) \quad (5.19)$$

$$Q_{ij} \leq Q_{ij}(0,9) + (q_{ij} - 0,9) \cdot Q'_{ij}(0,9) \quad (5.20)$$

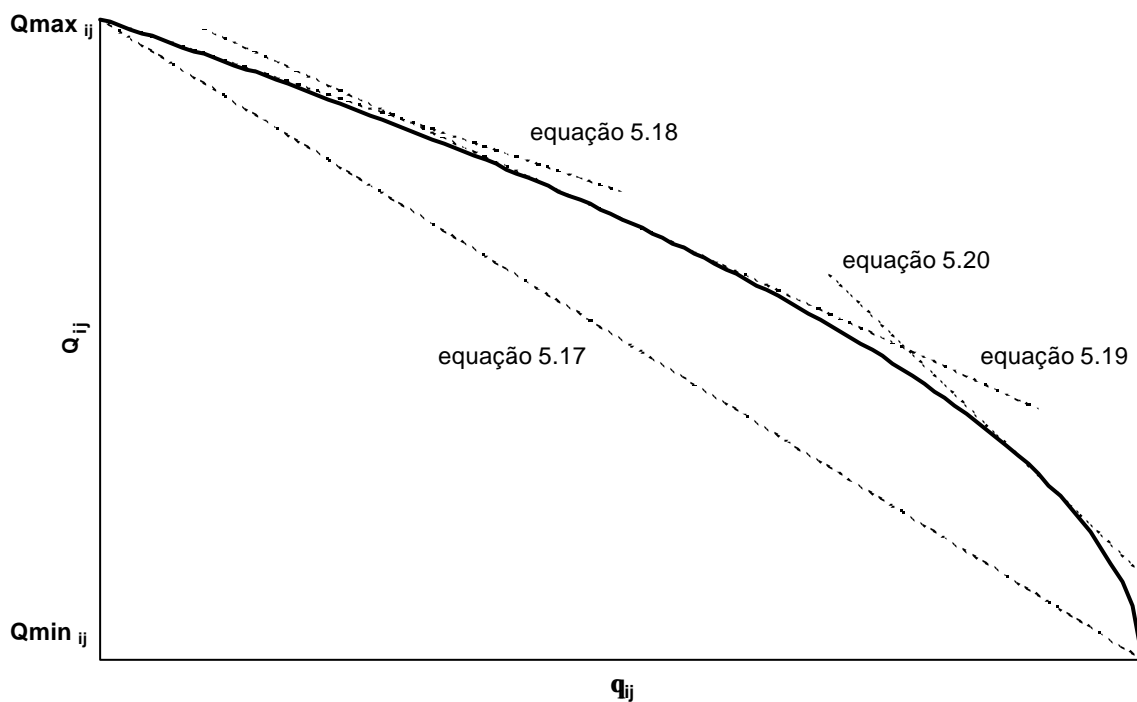


Figura 5.5 – Caso 2 da relação entre Q e  $\theta$ .

### Caso 3 : $Q_{max_{ij}} < 0$

Neste caso, como o sentido de fluxo no trecho é conhecido e contrário à convenção de numeração dos nós, as vazões apenas podem assumir valores negativos. A forma da

função  $Q_{ij}(q_{ij})$  (eq 3.7f) é ilustrada na figura 5.6, que mostra as retas utilizadas no processo de relaxação, representadas pelas equações 5.21, 5.22, 5.23 e 5.24. De forma similar ao caso 2, a reta 5.21 refere-se à reta que passa pelos pontos em que  $Q_{ij} = Q_{min_{ij}}$  e  $Q_{ij} = Q_{max_{ij}}$  e as equações 5.22, 5.23 e 5.24 referem-se às retas tangentes à curvas nos pontos em que  $q_{ij} = 0,1$ ,  $q_{ij} = 0,5$  e  $q_{ij} = 1$ .

$$Q_{ij} \leq q_{ij} \cdot Q_{min_{ij}} + (1 - q_{ij}) \cdot Q_{max_{ij}} \quad (5.21)$$

$$Q_{ij} \geq Q_{ij}(0,1) + (q_{ij} - 0,1) \cdot Q'_{ij}(0,1) \quad (5.22)$$

$$Q_{ij} \geq Q_{ij}(0,5) + (q_{ij} - 0,5) \cdot Q'_{ij}(0,5) \quad (5.23)$$

$$Q_{ij} \geq Q_{ij}(1) + (q_{ij} - 1) \cdot Q'_{ij}(1) \quad (5.24)$$

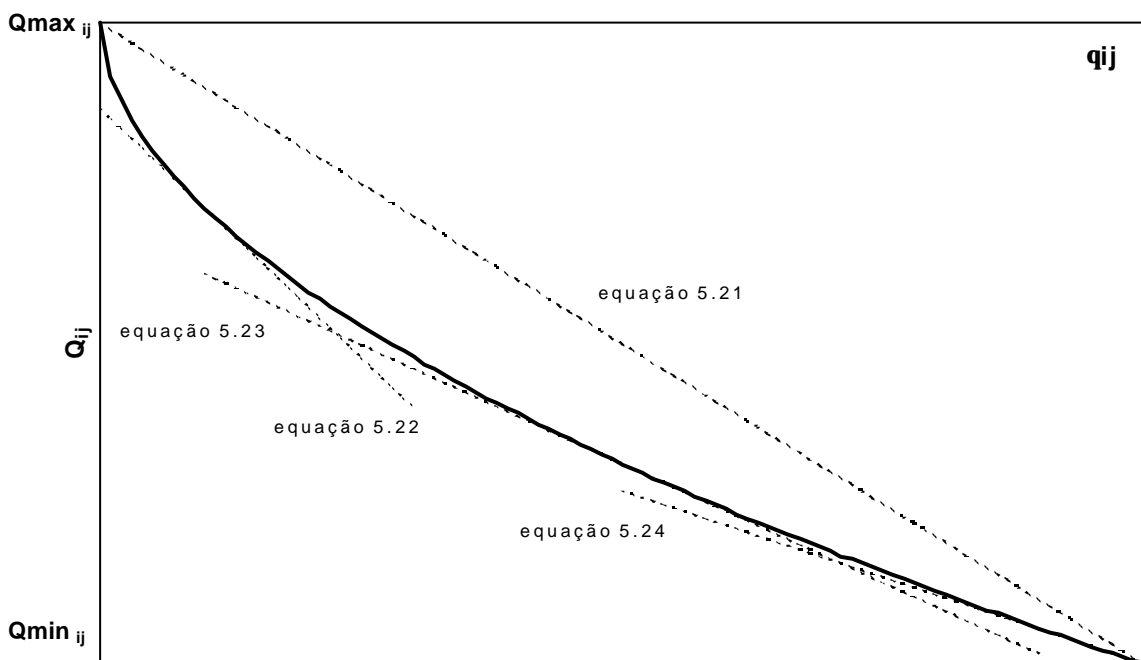


Figura 5.6 – Caso 3 da relação entre Q e  $\theta$ .

#### 5.1.4 Problema relaxado – limite inferior da função objetivo

O processo de relaxação gera uma formulação linear do problema cuja solução constitui um valor inferior (limite inferior) à solução do problema original. Essa formulação (equações 5.25) possui a mesma forma de 5.8 à exceção das restrições 5.8f que são relaxadas de acordo com o caso em que se enquadram.

$$\min \left[ \sum_{(i,j) \in T} \sum_{k=1}^{NK} C_k \cdot (u_{ijk} + y_{ijk}) \right] \quad (5.25a)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{NK} V \min_{ij} \mathbf{a}_{ijk} \cdot u_{ijk} + \sum_{k=1}^{NK} V \max_{ji} \mathbf{a}_{ijk} \cdot y_{ijk} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \quad (5.25b)$$

$$\sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ij} - \sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ji} = W_i \quad \forall (i) \in N \quad (5.25c)$$

$$\sum_{k=1}^{NK} (u_{ijk} + y_{ijk}) = L_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.25d)$$

$$\sum_{k=1}^{NK} u_{ijk} = \mathbf{q}_{ij} L_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.25e)$$

$Q_{min_{ij}} < 0$  e  $Q_{max_{ij}} > 0$ : equações (5.9), (5.10), (5.11), (5.12)

Se  $\mathbf{q}B$  não existe: equações (5.10), (5.12), (5.15)

Se  $\mathbf{q}C$  não existe: equações (5.9), (5.11), (5.16)

$Q_{min_{ij}} > 0$  e  $Q_{max_{ij}} > 0$ : equações (5.17), (5.18), (5.19), (5.20)

$Q_{min_{ij}} < 0$  e  $Q_{max_{ij}} < 0$ : equações (5.21), (5.22), (5.23), (5.24)

$$z \min_i \leq (H_i + z_i) \leq z \max_i \quad \forall (i) \in N \quad (5.25f)$$

$$Q \min_{ij} \leq Q_{ij} \leq Q \max_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.25g)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_{ij} \leq 1 \quad \forall (ij) \in T \quad (5.25h)$$

### 5.1.5 Problema exato – limite superior da função objetivo

O algoritmo de busca pelo ótimo global, apresentado na próxima seção, altera os intervalos de vazão  $[Q_{min_{ij}}; Q_{max_{ij}}]$  em cada trecho, de modo a encontrar diversas soluções para o problema relaxado (5.25) para cada intervalo testado. Como mostra a equação 5.1a, qualquer solução que atenda às restrições do problema original (5.8), dentro do mesmo intervalo testado, resulta em um valor da função objetivo superior à encontrada no problema relaxado (5.25) e constitui-se um provável ótimo global.

Uma regra heurística pode ser utilizada para determinar-se limites superiores às soluções do problema relaxado, como efetuado por Eiger *et al.* (1994) e Sherali *et al.* (1998). Uma vez

resolvido o problema relaxado, uma distribuição de vazões que atende às restrições de balanço de massa nos nós (5.8c e 5.24c) é determinada. O conhecimento dessa distribuição de vazões elimina a necessidade das restrições 5.8c e lineariza 5.8f no problema original, que torna-se linear. A solução desse novo problema, apresentado nas equações 5.26, com vazões fixadas, gera um limite superior ao problema relaxado.

$$\min \left[ \sum_{(i,j) \in T} \sum_{k=1}^{NK} C_k \cdot x_{ijk} \right] \quad (5.26a)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{NK} V_{ij}(Q_{ij}) \cdot a_{ijk} \cdot x_{ijk} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \quad (5.26b)$$

$$\sum_{k=1}^{NK} x_{ijk} = L_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.26c)$$

$$z \min_i \leq (H_i + z_i) \leq z \max_i \quad \forall (i) \in N \quad (5.26d)$$

$$Q \min_{ij} \leq Q_{ij} \leq Q \max_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.26e)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall (ij) \in T \quad k=1, \dots, NK \quad (5.26f)$$

### 5.1.6 Algoritmo *Branch and Bound*

Como mostra a equação 5.1a, a solução do problema relaxado (5.25), restrito a uma subdivisão do intervalo original de vazões em algum trecho  $[Qmin_{ij}; Qmax_{ij}]$ , é superior à obtida com o intervalo original de vazões. Portanto, os limites inferiores, obtidos pela aplicação do problema relaxado, pode ser aprimorado, ou seja, ter o valor da função objetivo incrementado, por meio da subdivisão do intervalo original de vazões. Ao mesmo tempo, a aplicação do problema exato (5.26) a uma subdivisão do intervalo original de vazões pode aprimorar o limite superior, reduzindo o valor da função objetivo.

O algoritmo *Branch and Bound* é utilizado para subdividir o intervalo original de vazões de forma sucessiva, determinando limites inferiores e superiores a cada subdivisão. Nesse processo, a diferença entre esses limites tende a ser reduzida até que o ótimo global é alcançado, quando a diferença é nula. Tolerâncias para essas diferenças podem ser previamente fixadas de modo a interromper o algoritmo quando uma solução de qualidade é encontrada. Tolerâncias da ordem de 1% resultam em soluções razoavelmente próximas do ótimo global (Sherali *et al.*, 1997).

Cada nó do algoritmo *Branch and Bound* é associado a um conjunto de intervalos de vazões em todos os trechos. A escolha do trecho da rede a ter seu intervalo de vazões dividido depende da qualidade das relaxações efetuadas nas restrições de conservação de energia. Assim, o trecho de pior qualidade quanto às relaxações deverá ter seu intervalo de vazões dividido, de modo a refinar o problema relaxado.

De acordo com Sherali *et al.* (1998), a qualidade das relaxações pode ser avaliada, em cada trecho, por meio da correspondente perda de carga, como mostram as equações 5.27a e 5.27b. Na equação 5.27a, a perda de carga é calculada a partir das cargas hidráulicas, que obedecem às restrições 5.25b e 5.25f. Na equação 5.27b, a perda de carga é calculada a partir das vazões, que obedecem às formas relaxadas das restrições de conservação de energia, de acordo com os casos 1, 2 e 3.

$$\Delta H1_{ij} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \quad (5.27a)$$

$$\Delta H2_{ij} = \sum_{k=1}^{NK} \text{sinal}(Q_{ij}) \cdot |Q_{ij}|^{1,852} \cdot a_{ijk} \cdot x_{ijk} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.27b)$$

O trecho a ter o intervalo de vazões dividido é o referente à maior discrepância  $d_{ij}$ , dada pela equação 5.28. Quando a solução do problema relaxado (5.25) satisfaz às restrições do problema não linear original (5.8), as equações 5.27a e 5.27b resultam no mesmo valor de perda de carga e  $d_{ij}=0$ , já que as vazões obtidas na relaxação satisfazem às restrições 5.8f.

$$d_{ij} = |\Delta H1_{ij} - \Delta H2_{ij}| \quad \forall (ij) \in T \quad (5.28)$$

Os sub-intervalos de vazões, gerados pela divisão dos intervalos originais, possuem os limites especificados nas equações 5.29a e 5.29b. Segundo Sherali *et al.* (1997), a qualidade das relaxações é aprimorada quando o sentido de fluxo no trecho é conhecido. Portanto, quando o intervalo de vazões do trecho enquadra-se no caso 1, são geradas duas subdivisões, cada uma com um sentido definido. Nos casos 2 e 3, os intervalos são divididos ao meio.

<u>Caso 1:</u>	subintervalo 1	→	$[Qmin_{ij} ; 0]$	
	subintervalo 2	→	$[0 ; Qmax_{ij}]$	(5.29a)

<u>Caso 2 e 3:</u>	subintervalo 1	→	$[Qmin_{ij} ; (Qmin_{ij}+ Qmin_{ij})/2]$	
	subintervalo 2	→	$[(Qmin_{ij}+ Qmin_{ij})/2 ; Qmax_{ij}]$	(5.29b)

O algoritmo *Branch and Bound* implementado segue o procedimento de Sherali *et al.* (1998) e pode ser sistematizado nos seguintes passos.

### **Passo 1 – Iniciação**

O problema relaxado é resolvido sobre o intervalo original de vazões, gerando o limite inferior global ao problema. Os valores de  $d_j$  são determinados para todos os trechos e, caso o valor máximo for nulo, o limite inferior encontrado constitui o ótimo global. Caso contrário, a distribuição de vazões obtida é fixada e o problema exato é resolvido, gerando o limite superior global do problema.

### **Passo 2 – *Branch* - Subdivisão do intervalo de vazões**

O trecho escolhido tem o intervalo de vazões subdividido conforme as equações 5.29a e 5.29b, definindo dois novos nó *Branch and Bound*. O problema relaxado é resolvido em cada subdivisão do intervalo de vazões gerando dois novos limites inferiores. O problema exato é resolvido em cada subdivisão do intervalo de vazões gerando dois novos limites superiores.

### **Passo 3 – *Bound* - Eliminação de nós *Branch and Bound***

Os nós *Branch and Bound* cujos limites inferiores são maiores do que o limite superior global e o nó *Branch and Bound* ativo são eliminados do processo de busca. Também são eliminados os nó *Branch and Bound* cujos problemas relaxados são impossíveis

### **Passo 4 – Verificação da convergência**

Verifica-se se o limite inferior global (dentre todos os nós *Branch and Bound* presentes no processo de busca) está próximo o bastante do limite superior. Se estiver, o ótimo global corresponde ao limite superior. Caso contrário, novas subdivisões serão necessárias.

### **Passo 5 – Seleção do nó *Branch and Bound* ativo**

Dentre todos os nós *Branch and Bound* presentes no processo de busca, é escolhido como ativo aquele que apresenta o menor limite inferior. O algoritmo retorna ao passo 2 para subdivisão desse nó.

## 5.2 ADAPTAÇÃO DO MODELO PARA EXPANSÃO DE REDES

O modelo apresentado encontra aplicação nos problemas de dimensionamento de redes em que apenas a configuração (*layout*) é conhecida. No caso da expansão de sistemas existentes ou do dimensionamento de redes em que alguns trechos possuem diâmetro conhecido, o modelo requer algumas adaptações nas formulações dos problemas aproximado e exato.

### 5.2.1 Problema Relaxado

Para que as variáveis originais do problema relaxado sejam mantidas, a formulação das restrições é exatamente a mesma no caso dos trechos com diâmetro desconhecido. No caso de trechos com diâmetros conhecidos, as equações 5.25b, 5.28d e 5.25e são modificadas de modo a conter apenas as variáveis correspondentes aos subtrechos de diâmetros conhecidos. Assim, as variáveis  $u$  e  $y$  referentes aos comprimentos dos subtrechos cujos diâmetros são diferentes daqueles conhecidos são eliminados da restrição. As equações 5.8 são mantidas para todos os trechos de diâmetros desconhecidos e as equações 5.30, apresentadas a seguir, são utilizadas para os trechos de diâmetros conhecidos.

$$V \min_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ij} \cdot u_{ij} + V \max_{ij} \cdot \mathbf{a}_{ij} \cdot y_{ij} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \quad (5.30a)$$

$$u_{ij} + y_{ij} = L_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.30b)$$

$$u_{ij} = \mathbf{q}_{ij} \cdot L_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.30c)$$

Os resultados obtidos pela aplicação desse novo problema relaxado – PR1 satisfazem as aproximações lineares da equação de conservação de energia. Portanto, as vazões geradas podem não satisfazer exatamente a equação de conservação de energia nos trechos de diâmetro conhecido. Isso produz dificuldades na aplicação do problema exato, já que esses trechos são compostos por subtrechos únicos de diâmetro conhecido, não havendo a possibilidade de alteração de suas características hidráulicas, como ocorre nos trechos de diâmetro desconhecido.

Para superar essa dificuldade, é formulado um segundo problema relaxado – PR2, no intuito de gerar vazões que atendam à equação de conservação de energia nos trechos de diâmetros conhecidos. A nova formulação é baseada no método da linearização de



equações, apresentado em 3.3.2., em que as vazões são alteradas em um processo iterativo até que um valor que atenda à equação de conservação de energia é encontrado.

Como em PR1, as equações referentes aos trechos de diâmetro desconhecido são mantidas no PR2. Nos trechos de diâmetro conhecido, a variável  $x_{ijk}$  referente ao comprimento do subtrecho é eliminada, já que é conhecida (igual ao comprimento total do trecho). Assim, são eliminadas as equações 5.8d e 5.8e. Da mesma forma, a variável  $t$  é eliminada, já que tem valor conhecido (= 1), assim com as equações 5.8b e 5.8f. Para manter a restrição de conservação de energia em cada trecho de diâmetro conhecido, é adicionada a equação 5.31.

$$\left( \mathbf{a}_{ij} \cdot L_{ij} \cdot Q_{ij}^{0,852} \right) \cdot Q_{ij} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \quad (5.31)$$

Em que:

$Q_{ij}$  : Vazão do trecho  $ij$  determinada na iteração anterior pelo PR2.

Na equação 5.31, a vazão  $Q_{ij}$  é conhecida, sendo determinada na iteração anterior pela aplicação do PR2 e, na primeira iteração pelo PR1. A cada iteração, o PR2 é aplicado e novas vazões são obtidas para os trechos de diâmetro conhecido. O processo termina quando a diferença entre as vazões calculadas entre duas iterações é menor do que um limite pré estabelecido. Para melhor convergência do processo, a partir da terceira iteração as vazões  $Q_{ij}$  são calculadas pela equação 5.32.

$$Q_{ij} = \frac{Q_{ij}^{(m-1)} + Q_{ij}^{(m)}}{2} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.32)$$

Em que:

$Q_{ij}^{(m-1)}$  : Vazão do trecho  $ij$  determinada na iteração  $m - 1$ ;

$Q_{ij}^{(m)}$  : Vazão do trecho  $ij$  determinada na iteração  $m$ .

## 5.2.2 Problema Relaxado

A formulação do problema é exato é semelhante às equações 5.26 , no caso de trechos com diâmetros desconhecidos. No caso de trechos de diâmetros conhecidos, a equação 5.26b é substituída pela equação 5.33 e a equação 5.26c é eliminada. Isso porque as variáveis de comprimento de subtrechos não existem quando o diâmetro do trecho é conhecido, o que altera, também, a função objetivo (5.26a).

$$V_{ij}(Q_{ij}) \cdot \mathbf{a}_{ij} \cdot L_{ij} = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \quad (5.33)$$

### 5.3 USO DO MODELO PARA REFORÇO DE REDES – TRECHOS EM PARALELO

A situação em que trechos da rede são dispostos em paralelo pode ocorrer quando a expansão do sistema promove acréscimos de demanda que não podem ser suportados pela sua capacidade hidráulica existente. Para aumentar a capacidade hidráulica e atender às novas demandas, novos trechos podem ser dispostos em paralelo aos existentes de forma que, para a mesma perda de carga, a vazão seja incrementada.

O modelo de otimização pode ser usado nessa situação desde que seus resultados sejam ajustados de modo que no cômputo do custo final ótimo não seja considerado o custo dos trechos existentes. Tratando-se os trechos a serem incrementados por tubulações em paralelo como qualquer outro trecho, a aplicação do modelo resultará em uma configuração de diâmetro equivalente maior do que a do trecho existente. Da relação entre o coeficiente de resistência do trecho obtido pelo modelo e o do trecho existente, pode ser determinado o diâmetro equivalente da tubulação a ser disposta em paralelo.

Descrevendo-se a perda de carga na tubulação pela equação 2.5, o coeficiente de resistência equivalente do trecho composto por segmentos em série, resultante do modelo de otimização, é dado pela equação 5.34. Essa configuração deverá ter o mesmo coeficiente de resistência do trecho composto por tubulações em paralelo. O coeficiente de resistência do trecho em paralelo é dado pela equação 6.35, considerando o coeficiente de resistência do trecho fixo.

$$K_{eq} = K_1 + K_2 \quad (5.34)$$

$$K_{par} = \left[ \left( \frac{1}{K_{eq}} \right)^{\frac{1}{1,852}} - \left( \frac{1}{K_{fix}} \right)^{\frac{1}{1,852}} \right]^{-1,852} \quad (5.35)$$

Em que:

$K_{eq}$  : Coeficiente de resistência equivalente do trecho;

$K_1$  e  $K_2$  : Coeficientes de resistência dos segmentos do trecho oriundo da rede ótima;

$K_{par}$  : Coeficiente de resistência do trecho em projeto, em paralelo com o trecho fixo;

$K_{fix}$  : Coeficiente de resistência do trecho fixo.

Os comprimentos dos subtrechos de diâmetros comerciais podem ser determinados a partir do coeficiente de resistência da tubulação em paralelo com a tubulação fixa, como mostra a equação 5.36. O novo trecho tem agora a mesma resistência do trecho resultante do modelo

de otimização. Os comprimentos dos segmentos do novo trecho são usados no cômputo do custo total da rede, que deve ser inferior ao valor ótimo, já que parte do custo está embutida no trecho de diâmetro conhecido.

$$Lpar_1 = \left( Kpar - \frac{L \cdot ap_2}{ap_1 - ap_2} \right) \quad (5.36)$$

$$ap_1 = \frac{10,66}{Dp_1^{4,87} \cdot Chwp_1^{1,852}} \quad (5.37)$$

$$Lpar_2 = L - Lpar_1 \quad (5.38)$$

Em que:

- $Lpar_1$  : comprimento do primeiro segmento do trecho em projeto (paralelo);
- $Lpar_2$  : comprimento do segundo segmento do trecho em projeto (paralelo);
- $ap_1$  : coeficiente de resistência do primeiro segmento do trecho em projeto (paralelo);
- $ap_2$  : coeficiente de resistência do segundo segmento do trecho em projeto (paralelo);
- $Dp_1$  : diâmetro do primeiro segmento do trecho em projeto (paralelo);
- $Chwp_1$  : coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams do primeiro segmento do trecho em projeto (paralelo);

A situação em que o resultado do modelo aponta para uma configuração em que o diâmetro equivalente é inferior ao existente no trecho indica que o incremento de capacidade hidráulica desse trecho não é necessário. Nesse caso, a disposição de trechos em paralelo pode ser dispensada e o trecho é tratado como de diâmetro fixo e igual ao existente.

#### 5.4 DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DOS INTERVALOS DE VAZÃO

Para aplicação do modelo, devem ser pré-estabelecidos limites de vazão mínimos e máximos em cada trecho, que definem o espaço de soluções em que o algoritmo empreenderá a busca pelo ótimo. A qualidade desses limites, em termos da distância dos extremos do intervalo ao valor ótimo de vazão, tem papel decisivo na velocidade de convergência do algoritmo. Contudo, intervalos mais estreitos podem excluir o ótimo global do problema do espaço de soluções, ainda que acelerem o processo de busca.

Em suas aplicações, Smith e Sherali (1997) utilizaram um modelo de otimização relaxado para determinar prováveis limites globais de vazão para cada trecho, gerando intervalos mais estreitos que contribuíram para a aceleração do processo de busca. Esquema semelhante foi utilizado por Zamora e Grossman (1998) em aplicações a problemas de

engenharia química. Smith e Pantelides (1999) propuseram um modelo otimização para determinar limites iniciais de vazão e relações baseadas nas restrições do problema para aprimorar o intervalo a cada nó enumerado na árvore de busca. Sherali *et al.* (1998) determinaram esses limites com base nas demandas e na continuidade de vazões em cada nó, no caso de redes pequenas. No caso de redes maiores, diversos caminhos de fluxo foram testados de modo a se determinar as maiores e menores vazões factíveis em cada trecho.

Os limites máximos e mínimos de vazão nos trechos podem ser determinados por meio de um problema de otimização em que a variável a ser otimizada é a própria vazão. Como restrições, as equações de conservação de massa e de energia nos nós e trechos da rede devem ser respeitadas. Além disso, os diâmetros dos trechos e cargas hidráulicas dos nós devem variar dentro de intervalos pré definidos. A formulação desse problema é apresentada na equação 5.39.

$$\min Q_{ij} \quad (5.39a)$$

sujeito a:

$$\Delta H_{ij}(Q_{ij}, D_{ij}) = (H_i + z_i) - (H_j + z_j) \quad \forall (ij) \in T \quad (5.39b)$$

$$\sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ij} - \sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ji} = W_i \quad \forall (i) \in N \quad (5.39c)$$

$$z \min_i \leq (H_i + z_i) \leq z \max_i \quad \forall (i) \in N \quad (5.39d)$$

$$D \min_{ij} \leq D_{ijk} \leq D \max_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.39e)$$

$$Q \min_{ij} \leq Q_{ij} \leq Q \max_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.39f)$$

Devido às restrições 5.39b, o espaço de soluções possíveis é não convexo, impossibilitando o uso de técnicas de programação linear. No lugar na linearização dessas restrições, o que resultaria em limites de vazão relaxados, pode-se empregar alguma técnica de programação não linear na resolução do problema. Incorporando coeficientes de tolerância no atendimento às restrições 5.39b e 5.39c e adotando-se a equação de Hazen-Williams para descrição da perda de carga na tubulação, a nova formulação é dada pela equação 5.40.

$$\min Q_{ij} \quad (5.40a)$$

sujeito a:

$$\frac{\mathbf{a}_{ij} \cdot L_{ij} \cdot Q_{ij}^{1,852}}{Chw_{ij}^{1,852} \cdot D_{ij}^{4,87}} - (H_i + z_i) + (H_j + z_j) \leq TOL_1 \quad \forall (ij) \in T \quad (5.40b)$$

$$\sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ij} - \sum_{j=1, (i,j) \in T}^{NN} Q_{ji} - W_i \leq TOL_2 \quad \forall (i) \in N \quad (5.40c)$$

$$z \min_i \leq (H_i + z_i) \leq z \max_i \quad \forall (i) \in N \quad (5.40d)$$

$$D \min_{ij} \leq D_{ij} \leq D \max_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.40e)$$

$$Q \min_{ij} \leq Q_{ij} \leq Q \max_{ij} \quad \forall (ij) \in T \quad (5.40f)$$

Em que:

$TOL_1$  : Tolerância no atendimento à restrição de conservação de energia;

$TOL_2$  : Tolerância no atendimento à restrição de conservação de massa.

Ainda que o uso de técnicas de programação não linear não garantam que o resultado obtido é globalmente ótimo, é improvável que a vazão que leva ao custo ótimo da rede seja o limite máximo ou mínimo do trecho. Assim, a formulação acima permite que intervalos mais estreitos sejam determinados, reduzindo o espaço de soluções possíveis.

## **6. CONFIABILIDADE DE REDES DE DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA**

Neste capítulo é apresentado o modelo desenvolvido para determinação da confiabilidade global de redes de distribuição, em função da probabilidade de falha de seus trechos. Em seguida, é apresentado um algoritmo de análise da variação de custo e confiabilidade obtida a partir da modificação de diâmetros em trechos da rede.

### **6.1 O MODELO DE ANÁLISE DE CONFIABILIDADE**

O modelo desenvolvido concentra-se na análise da confiabilidade mecânica de redes, avaliando o efeito de falhas físicas de trechos na performance global do sistema. A natureza estocástica dessas falhas é considerada na medida em que suas probabilidades de ocorrência são utilizadas no cômputo de índices de confiabilidade. Entretanto, outras falhas, como as decorrentes de variações de consumo ou da incerteza quanto aos parâmetros de projeto, não são consideradas.

A confiabilidade do sistema é mensurada em termos de índices de performance, seguindo a metodologia apresentada por Gupta e Bhave (1994, 1996). Esses índices são determinados para cada nó, em função das cargas hidráulicas e vazões disponíveis. Índices globais podem ser determinados em função dos índices nodais.

Os índices de performance são determinados para cada configuração de falha no sistema, associadas a interrupções de fluxo em determinados trechos. As diversas configurações analisadas e seus índices de performance são associados a probabilidades de ocorrência, de modo que um índice global de confiabilidade pode se definido em função das performances e probabilidades.

#### **6.1.1 Configurações de Falha**

Configuração de falha ocorre quando um ou mais trechos da rede são colocados fora de serviço devido à interrupção de fluxo, geralmente causada pela danificação temporária da tubulação. Para a concepção do modelo, admite-se que o trecho falho pode ser isolado completamente do restante da rede e que os eventos de falha são estatisticamente independentes. A probabilidade de um determinado trecho funcionar, também chamada disponibilidade do trecho, pode ser estimada pela equação 6.1, de acordo com a teoria da confiabilidade.

$$P_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{ij} + F_{ij}} = \frac{TMF_{ij}}{TMF_{ij} + TMR_{ij}} \quad (6.1)$$

em que:

- $P_{ij}$  : probabilidade do trecho  $ij$  funcionar ou disponibilidade do trecho;
- $R_{ij}$  : taxa de reparos ou número de reparos por unidade de tempo no trecho  $ij$ ;
- $F_{ij}$  : taxa de falhas ou número de falhas por unidade de tempo no trecho  $ij$ ;
- $TMF_{ij}$  : tempo médio entre falhas consecutivas no trecho  $ij$ ;
- $TMR_{ij}$  : tempo médio de reparo do trecho  $ij$ .

Os termos da equação 6.1, utilizada por Fujiwara e De Silva (1989), Fujiwara e Tung (1991) e Cullinane *et al.* (1992), são de natureza estocástica e podem ser estimados por distribuições de probabilidade. Equações de regressão em função do diâmetro das tubulações também têm sido propostas para essa estimativa, como a equação 6.2, adaptada de Cullinane *et al.* (1992).

$$P_{ij} = \frac{45,60857656 \cdot D_{ij}^{1,462131}}{0,002107919 \cdot D_{ij}^{0,285} + 45,60857656 \cdot D_{ij}^{1,462131}} \quad (6.2)$$

em que:

- $D_{ij}$  : diâmetro do trecho  $ij$ , em metros.

Em uma rede de distribuição, a probabilidade de todos os trechos funcionarem é dada pelo produto das disponibilidades  $P_{ij}$ , referentes a cada trecho. A probabilidade de apenas um trecho falhar enquanto todos os outros funcionam perfeitamente é dada pela equação 6.3.

$$P0 = \prod_{ij \in T} P_{ij} \quad (6.3a)$$

$$PF_{rs} = (1 - P_{rs}) \cdot \prod_{ij \neq rs} P_{ij} \quad (6.3b)$$

em que:

- $P0$  : probabilidade de todos os trechos funcionarem;
- $PF_{rs}$  : probabilidade de apenas o trecho  $rs$  falhar;

No caso de trechos compostos por vários subtrechos de diâmetros distintos, a probabilidade de perfeito funcionamento corresponde ao produto das probabilidades de cada subtrecho. Como resultado, a probabilidade de todos os trechos funcionarem passa a ser descrita pela equação 6.4a. Da mesma forma, a probabilidade de apenas um trecho falhar enquanto os outros funcionam é dada pela equação 6.4b.

$$P0 = \prod_{ij \in T} \left( \prod_{k=1}^{NK} Pop_{ijk} \right) \quad (6.4a)$$

$$PF_{rs} = \left( 1 - \prod_{k=1}^{NK} Pop_{rsk} \right) \cdot \prod_{ij \neq rs} \left( \prod_{k=1}^{NK} Pop_{ijk} \right) \quad (6.4b)$$

em que:

$Pop_{ijk}$  : probabilidade do segmento  $k$  do trecho  $ij$  funcionar;

A análise da confiabilidade global deve avaliar a performance do sistema sob as diversas configurações de falha, considerando suas probabilidades de ocorrência. Contudo, algumas configurações podem ser excluídas da análise por apresentarem reduzida probabilidade de ocorrência. No caso de redes de distribuição, a probabilidade de falha de um trecho isolado é, geralmente, baixa, já que a probabilidade de perfeito funcionamento é alta. Por isso, a probabilidade de falha simultânea de dois ou mais trechos é suficientemente pequena para ser desprezada na análise.

No modelo proposto, as probabilidades de falha  $PF$  são calculadas, de acordo com a equação 6.4, para cada configuração em que apenas um trecho da rede falha e para a configuração em que todos os trechos funcionam perfeitamente. A cada configuração de falha é associado um índice de performance da rede, em função do atendimento aos requisitos de pressão e vazão. O índice de confiabilidade global é determinado a partir das performances hidráulicas em cada configuração de falha e de suas probabilidades de ocorrência.

### 6.1.2 Performance Hidráulica Nodal - PHN

Em uma determinada configuração de falha, o desempenho hidráulico da rede é avaliado em cada nó, de acordo com sua habilidade em atingir os requisitos de pressão e vazão, quantificada por meio de uma função de performance hidráulica nodal –  $PHN$ . Essa função busca quantificar a performance hidráulica de um determinado nó da rede quando algum trecho está fora de funcionamento, com base em parâmetros como carga hidráulica e vazão.

No modelo proposto, a função  $PHN$  é expressa pela média de duas funções lineares que quantificam a performance a partir da carga hidráulica nodal e vazão disponível para consumo, respectivamente. Para definição dessas funções, devem ser pré definidos parâmetros como carga hidráulica mínima admissível, carga hidráulica aceitável, vazão mínima admissível e consumo nos nós.



A primeira função (*PHN1*), mostrada na figura 6.1a, assume valor nulo quando a carga hidráulica no nó é menor do que a carga hidráulica mínima admissível e valor 1 quando é maior do que a carga hidráulica aceitável, variando linearmente entre esses limites. A segunda função (*PHN2*), mostrada na figura 6.1b, assume valor nulo quando a vazão disponível no nó é menor do que a vazão mínima admissível e valor 1 quando é maior do que o consumo nodal. A tabela 6.1 apresenta o comportamento dessas funções em todos os casos possíveis, assim como a função *PHN*, dada pela média entre *PHN1* e *PHN2*.

O cômputo das cargas hidráulicas é efetuado pelo modelo hidráulico nodal, resolvido pelo método de Newton-Raphson. Dada uma determinada configuração de consumo na rede, o modelo determina as cargas hidráulicas nos nós, encontrando cargas negativas quando os consumos não são satisfeitos. Nesses casos, cargas hidráulicas são igualadas à cota do terreno e fixadas, determinando-se, por meio do modelo hidráulico, a máxima vazão disponível para consumo nesses nós. Desta forma, as vazões de consumo  $Q_w$  somente ficarão abaixo dos consumos nodais  $W_i$  quando as cargas forem nulas. Do mesmo modo, a função *PHN2* apenas assumirá valores inferiores a 1 quando a função *PHN1* for nula.

Nessa concepção, a performance hidráulica dos nós em que o consumo não é totalmente satisfeito será de, no máximo, 0,5. Por outro lado, a performance hidráulica dos nós em que o consumo é satisfeito, mesmo que associado a cargas hidráulicas inferiores à mínima, será, sempre, superior a 0,5. Assim, os nós em que os consumos não são totalmente satisfeitos sempre estarão associados a piores performances em relação aos nós que atendem aos consumos, ainda que com cargas hidráulicas inferiores às mínimas.

Tabela 6.1 – Funções *PHN1*, *PHN2* e *PHN* em todos os casos possíveis.

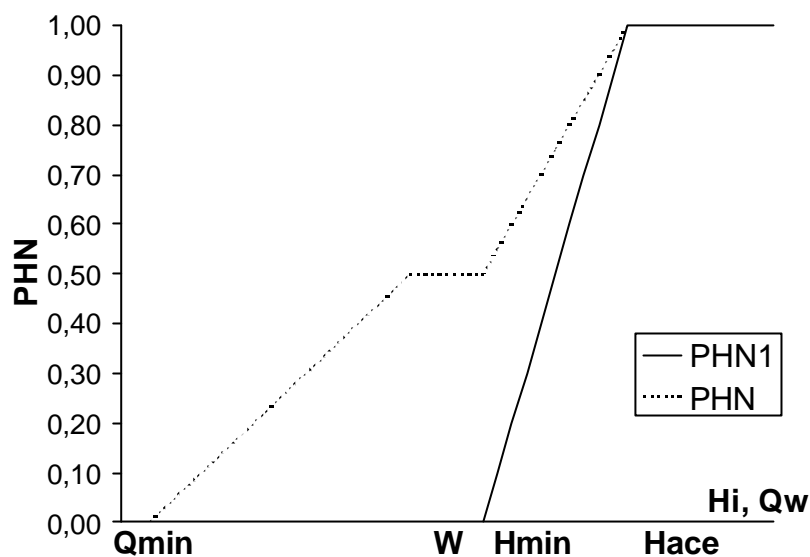
Carga hidráulica	Vazão de consumo	PHN1	PHN2	PHN
$H \geq H_{ace}$	$Q_w = W$	1	1	1
$H_{min} \leq H < H_{ace}$	$Q_w = W$	$\frac{H - H_{min}}{H_{ace} - H_{min}}$	1	$\frac{H - 2 \cdot H_{min} + H_{ace}}{2 \cdot (H_{ace} - H_{min})}$
$0 \leq H < H_{min}$	$Q_w = W$	0	1	0,5
$H = 0$	$Q_{ace} \leq Q_w \leq W$	0	$\frac{Q_w - Q_{ace}}{W - Q_{ace}}$	$\frac{Q_w - Q_{ace}}{2 \cdot (W - Q_{ace})}$
$H = 0$	$Q_w \leq Q_{ace}$	0	0	0

$H_{ace}$  = Carga hidráulica aceitável;

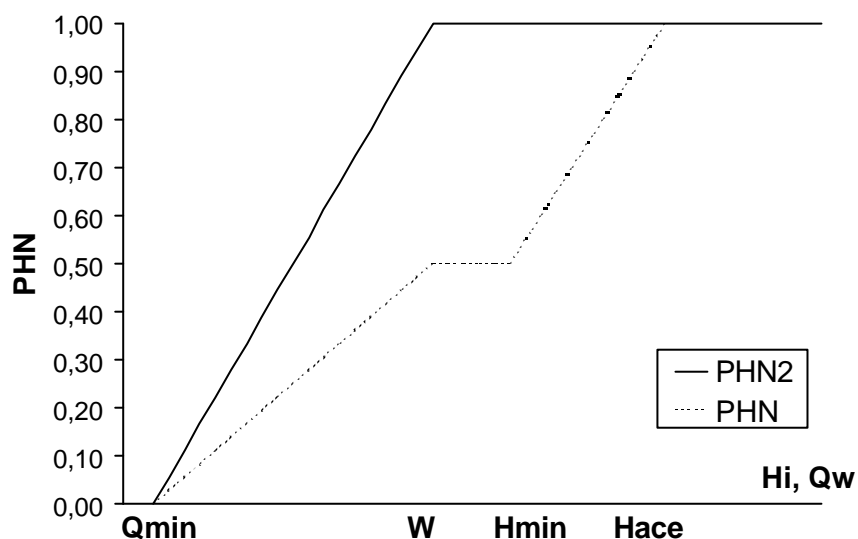
$H_{min}$  = Carga hidráulica mínima;

$Q_w$  = Vazão disponível para consumo;

$Q_{ace}$  = Vazão mínima aceitável para consumo.



6.1a – Função *PHN1*.



6.1b – Função *PHN2*.

Figura 6.1 – Comportamento das funções *PHN1*, *PHN2* e *PHN*.

### 6.1.3 Performance Hidráulica Global - PHG

O índice de performance hidráulica global (*PHG*) foi concebido de modo a avaliar o desempenho hidráulico da rede em função das performances de cada nó, em uma determinada configuração de falha. A definição do índice de performance global é oportuna já que o modelo tem por finalidade propiciar a análise das relações entre o custo total e a confiabilidade da rede.

Segundo Tanyimboh *et al.* (1998), um índice global de performance da rede pode ser obtido pela média dos índices nodais, ponderados pelas respectivas demandas. Seguindo esse conceito, o índice *PHG* é definido como a média ponderada dos índices de performance nodais em que os pesos são as demandas em cada nó, como mostra a equação 6.5.

$$PHG_{rs} = \frac{\sum_{i=1}^{NN} W_i \cdot PHN_i}{\sum_{i=1}^{NN} W_i} \quad (6.5)$$

Em que:

$PHG_{rs}$  : Performance hidráulica global da configuração em que o trecho *rs* falha.

#### 6.1.4 Índice de Confiabilidade - ICF

Na análise global da confiabilidade da rede, a performance hidráulica deve ser avaliada em todas as configurações de falha possíveis. No modelo proposto, a performance hidráulica global esperada (*PHGE*) é determinada a partir das probabilidade de ocorrência de cada configuração de falha, como mostra a equação 6.6.

$$PHGE_{ij} = PHG_{ij} \cdot PF_{ij} \quad (6.6)$$

Em que:

$PHGE_{ij}$  : Performance hidráulica global esperada quando o trecho *ij* falha.

O índice de confiabilidade da rede (*ICF*) corresponde ao somatório das performances hidráulicas globais esperadas, determinadas para cada configuração de falha, admitindo-se que essas são estatisticamente independentes. Na análise, também é considerada a configuração em que todos os trechos estão em funcionamento, associada à sua probabilidade de ocorrência (*P0*), como mostra a equação 6.7.

$$ICF = P0 \cdot PHG_0 + \sum_{ij \in T} PHG_{ij} \cdot PF_{ij} \quad (6.7)$$

Em que:

*ICF* : Índice de confiabilidade da rede;

$PHG_0$  : Performance hidráulica global quando todos os trechos funcionam.

Como o modelo analisa as configurações em que apenas um trecho falha, o somatório das probabilidades de ocorrência corresponde a uma fração de todas as configurações possíveis. Assim, a equação 6.7 admite que todas as outras configurações conduzem a performances hidráulicas nulas, já que suas probabilidades de ocorrência são positivas.

Como, na verdade, essas performances hidráulicas não são nulas, o índice ICF representa um limite mínimo de confiabilidade. Contudo, ainda que simplificado, o índice ICF permite a análise da variação do custo com confiabilidade, o que valida a forma como é definido.

## 6.2 A RELAÇÃO ENTRE CONFIABILIDADE E CUSTO

Como destacado por Gupta e Bhave (1996), a confiabilidade do sistema está diretamente relacionada com a sua capacidade de atender requisitos de performance durante situações de falha de componentes. No caso de redes de distribuição de água, a confiabilidade, quantificada por índices de performance hidráulica, é função das pressões e vazões na rede, determinadas pelas características hidráulicas de seus componentes. Portanto, a confiabilidade da rede pode ser variada a partir de alterações em suas características hidráulicas, sobretudo das tubulações.

Por outro lado, a alteração das características hidráulicas da rede implica na variação do seu custo de implantação, já que componentes que promovem aumento de capacidade hidráulica e melhora dos índices de performance estão ligados a custos mais elevados. Assim, a maior confiabilidade estaria associada a custos mais altos e vice-versa.

O modelo proposto segue a metodologia apresentada por Gupta e Bhave (1996), em que a confiabilidade da rede é variada a partir de acréscimos nos diâmetros das tubulações. Como também é objetivo do modelo a análise dos casos em que trechos da rede são compostos por mais de um diâmetro, como ocorre nos resultados do modelo de otimização, a confiabilidade é variada, também, por meio da unificação dos diâmetros desses trechos.

As modificações nos trechos segue um algoritmo que procura aumentar a confiabilidade da rede ao menor custo. Para tanto, as modificações são testadas em todos os trechos e as variações em termos de confiabilidade e custo são computadas de acordo com as equações 6.8 e 6.9, respectivamente.

$$\Delta ICF_{ij} = \frac{ICF_{final} - ICF_{inicial}}{ICF_{inicial}} \quad (6.8)$$

$$\Delta C_{ij} = \frac{CT_{final} - CT_{inicial}}{C_{total}} \quad (6.9)$$

Em que:

$\Delta ICF_{ij}$  : Variação do índice de confiabilidade  $ICF$  decorrente da alteração do trecho  $ij$ ;

$ICF_{final}$  : Índice  $ICF$  da configuração obtida após a alteração do diâmetro;

- $ICF_{inicial}$  : Índice  $ICF$  da configuração obtida antes da alteração do trecho;
- $\Delta C_{ij}$  : Variação do custo total da rede decorrente da alteração do trecho  $ij$ ;
- $CT_{final}$  : Custo do trecho após a alteração do diâmetro;
- $CT_{inicial}$  : Custo do trecho antes da alteração do diâmetro.

A relação entre as variações de confiabilidade e custo ( $\Delta CC$ ) decorrentes da alteração de um determinado trecho pode ser avaliada pela equação 6.10. A cada iteração, o algoritmo testa todos os trechos e computa o valor de  $\Delta CC$  correspondente. A alteração referente ao maior valor de  $\Delta CC$  é efetivada pelo algoritmo, já que corresponde à melhor relação entre confiabilidade e custo.

$$\Delta CC_{ij} = \frac{\Delta ICF_{ij}}{\Delta CT_{ij}} \quad (6.10)$$

Em que:

$\Delta CC_{ij}$  : Relação entre variações de confiabilidade e custo obtidas pela alteração do trecho  $ij$ .

### 6.2.1 Variação da confiabilidade

O efeito da alteração de diâmetros em um determinado trecho é analisado com base na variação do  $ICF$ , avaliado nas configurações obtidas antes e após a alteração. Para cada avaliação do  $ICF$ , os índices de performance hidráulica  $PHN$  e  $PHG$  devem ser determinados de acordo com as vazões e pressões na rede, obtidas por meio do modelo hidráulico.

O modelo hidráulico adotado segue a formulação nodal, em que as incógnitas são as cargas nos nós e cada trecho é caracterizado pelo coeficiente de perda de carga  $K$  que, no caso da equação de Hazen Williams, pode ser obtido pela equação 6.11a. Para simplificar a formulação, alguns termos podem ser agrupados no coeficiente  $a$ , dado pela equação 6.11b. Empregando-se esse coeficiente, a equação de perda de carga pode ser expressa pela equação 6.11c. Assim, as variações de capacidade hidráulica em um determinado trecho podem ser representadas apenas pela variação do respectivo coeficiente  $a$ .

$$K = \frac{10,66 \cdot L}{C_k^{1,852} \cdot D_k^{4,87}} \quad (6.11a)$$

$$a = \frac{10,66}{C_k^{1,852} \cdot D_k^{4,87}} = \frac{K}{L} \quad (6.11b)$$

$$\Delta H = \mathbf{a} \cdot L \cdot Q^{1,852} \quad (6.11c)$$

Em que:

$k$  : Índice do segmento do trecho;

No caso de trechos com mais de um diâmetro, a perda de carga total é dada pela soma das perdas de carga em cada subtrecho. Do mesmo modo, o coeficiente  $K$  do trecho também é dado pela soma dos coeficientes de cada subtrecho, conforme a equação 6.12a. Quando os diâmetros são unificados, o coeficiente  $K$  do trecho passa a referir-se apenas a um diâmetro e a um comprimento, como mostra a equação 6.12b.

$$\Delta H_o = \left( \frac{10,66 \cdot L_1}{Chw_1^{1,852} \cdot D_1^{4,87}} + \frac{10,66 \cdot L_2}{Chw_2^{1,852} \cdot D_2^{4,87}} \right) \cdot Q^{1,852} = (\mathbf{a}_1 \cdot L_1 + \mathbf{a}_2 \cdot L_2) \cdot Q^{1,852} \quad (6.12a)$$

$$\Delta H_u = \frac{10,66}{Chw_2^{1,852} \cdot D_2^{4,87}} \cdot (L_1 + L_2) \cdot Q^{1,852} = \mathbf{a}_2 \cdot (L_1 + L_2) \cdot Q^{1,852} \quad (6.12b)$$

Em que:

$\Delta H_o$  : perda de carga original do trecho, antes da unificação de diâmetros;

$\Delta H_u$  : perda de carga final do trecho, após a unificação de diâmetros;

$L_1$  : comprimento do subtrecho de menor diâmetro;

$L_2$  : comprimento do subtrecho de maior diâmetro;

$Chw_1$  : coeficiente de rugosidade de Hazen Williams do subtrecho de menor diâmetro;

$Chw_2$  : coeficiente de rugosidade de Hazen Williams do subtrecho de maior diâmetro;

$D_1$  : diâmetro do subtrecho de menor diâmetro;

$D_2$  : diâmetro do subtrecho de maior diâmetro;

$\mathbf{a}_1$  : coeficiente de resistência do subtrecho de menor diâmetro;

$\mathbf{a}_2$  : coeficiente de resistência do subtrecho de maior diâmetro;

Portanto, a variação da capacidade hidráulica do trecho decorrente da unificação de diâmetros pode ser obtida pela diferença entre os coeficientes de perda de carga  $K$  em cada configuração, como apresentado na equação 6.13. Essa diferença é acrescentada ao coeficiente  $K$  do trecho que está sendo unificado, obtendo-se novas vazões e pressões a partir da nova configuração.

$$\Delta Ku = [\mathbf{a}_2 \cdot (L_1 + L_2)] - [\mathbf{a}_1 \cdot L_1 + \mathbf{a}_2 \cdot L_2] = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \cdot L_1 \quad (6.13)$$

Em que:

$\Delta Ku$  : Acréscimo no coeficiente de perda de carga decorrente da unificação de diâmetros.

Análise semelhante pode ser conduzida no caso em que o trecho é composto por apenas um diâmetro. Partindo da equação 6.11b, observa-se que o comprimento do trecho pode ser formulado em função de  $K$  e  $a$  (6.14). Utilizando-se essa relação, pode-se obter a diferença entre coeficientes de perda de carga  $K$ , apresentada na equação 6.15.

$$\mathbf{a} = \frac{K}{L} \Rightarrow L = \frac{K}{\mathbf{a}} \quad (6.14)$$

$$\Delta Ka = [\mathbf{a}_2 \cdot L] - [\mathbf{a}_1 \cdot L] = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \cdot \frac{K_1}{\mathbf{a}_1} \quad (6.15)$$

Em que:

$\Delta Ka$  : Acréscimo no coeficiente de perda de carga decorrente do aumento de diâmetro;

$L$  : Comprimento do trecho;

$K_1$  : Coeficiente de perda de carga referente ao menor diâmetro do trecho.

As alterações na capacidade hidráulica dos trechos são procedidas acrescentando-se os termos  $\Delta Ku$  ou  $\Delta Ka$  aos coeficientes de perda de carga  $K$  correspondentes. A aplicação do modelo hidráulico a essa nova configuração gera novos índices de performance e de confiabilidade, utilizados na verificação da qualidade da alteração no trecho.

### 6.2.2 Variação do custo

A variação de custo decorrente da modificação de diâmetros em um trecho é função da variação do custo unitário e do comprimento do trecho de menor diâmetro. No caso de trechos com dois diâmetros, antes da modificação, o custo é representado pela soma dos custos de cada subtrecho (equação 6.16a); após a modificação, o custo é calculado com base no custo unitário do subtrecho de maior diâmetro e no comprimento total do trecho (equação 6.16b). A variação de custo no trecho é dada pela diferença entre os custos antes e após a modificação, como mostra a equação 6.16c.

$$CT_{inicial} = C_1 \cdot L_1 + C_2 \cdot L_2 \quad (6.16a)$$

$$CT_{final} = C_2 \cdot (L_1 + L_2) \quad (6.16b)$$

$$CT_{inicial} - CT_{final} = (C_2 - C_1) \cdot L_1 \quad (6.16c)$$

Em que:

- $C_1$  : Custo unitário do subtrecho de menor diâmetro;  
 $C_2$  : Custo unitário do subtrecho de maior diâmetro.

A substituição da equação 6.16c na equação 6.9 resulta na equação 6.17, que representa a variação do custo apenas em função dos custos unitários e comprimento do subtrecho de menor diâmetro.

$$\Delta C_{ij} = \frac{(C_2 - C_1) \cdot L_1}{C_{total}} \quad (6.17)$$

No caso de trechos com apenas um diâmetro, a variação de custo pode ser obtida pela equação 6.18, observando-se que o comprimento do trecho pode ser determinado pela equação 6.14.

$$CT_{final} - CT_{inicial} = C_2 \cdot L - C_1 \cdot L = (C_2 - C_1) \cdot L = (C_2 - C_1) \cdot \frac{K_1}{a_1} \quad (6.18)$$

A substituição da equação 6.18 na equação 6.9 resulta na equação 6.19, que representa a variação do custo apenas em função dos custos unitários e comprimento do trecho.

$$\Delta C_{ij} = \frac{(C_2 - C_1) \cdot K_1}{C_{total} \cdot a_1} \quad (6.19)$$

### 6.2.3 Algoritmo de alteração de diâmetros

O procedimento de alteração de diâmetros segue um algoritmo que verifica a melhor alteração a ser feita em termos da relação confiabilidade x custo. As alterações são feitas a cada iteração até que o aumento de confiabilidade seja muito reduzido em relação ao aumento de custo.

Para limitação do algoritmo, apenas uma alteração de aumento de diâmetro é permitida em cada trecho. Assim, nos trechos compostos por dois diâmetros, são permitidas duas alterações, uma para unificação dos diâmetros e outra para aumento do diâmetro unificado. O algoritmo segue os passos abaixo.



- Passo 0 – Início: determinar pressões e vazões na rede aplicando o modelo hidráulico nodal à sua configuração original; determinar os índices  $PHN$ ,  $PHG$  e  $ICF_{iniciais}$ ;
- Passo 1 – Verificação da alteração do trecho: se todos os trechos já foram verificados, seguir para o passo 6; caso contrário, se o trecho tem dois diâmetros seguir para o passo 2; se o trecho tem um diâmetro seguir para o passo 3;
- Passo 2 – Unificação de diâmetros: determinar  $\Delta Ku$  pela equação 6.13 e acrescentar ao coeficiente  $K$  do trecho; determinar  $\Delta C$  pela equação 6.17; seguir para o passo 4;
- Passo 3 – Aumento de diâmetro: se o trecho já sofreu aumento de diâmetro, passar para o próximo trecho e voltar ao passo 1; caso contrário, determinar  $\Delta Ka$  pela equação 6.15 e acrescentar ao coeficiente  $K$  do trecho; determinar  $\Delta C$  pela equação 6.19;
- Passo 4 – Análise hidráulica: Com o novo valor de  $K$  do trecho, determinar vazões e pressões na rede usando modelo nodal; determinar índices  $PHN$ ,  $PHG$  e  $ICF_{finalis}$ ;
- Passo 5 – Teste de confiabilidade e custo: determinar variações  $\Delta ICF$  pela equação 6.8 e  $\Delta CC$  pela equação 6.10; se a variação  $\Delta CC$  é maior do que a variação atual  $\Delta CC_{atual}$ , fazer  $\Delta CC_{atual} = \Delta CC$ ; passar para o próximo trecho; voltar ao passo 1.
- Passo 6 – Efetivação da alteração: Se  $\Delta CC_{atual}$  é pequeno o bastante, fim do algoritmo; caso contrário, efetivar a alteração no trecho correspondente ao  $\Delta CC_{atual}$ .
- Passo 7 – Critério de parada: Se todos os trechos já sofreram aumento de diâmetro, fim do algoritmo; caso contrário, voltar ao passo 0.

## **7. APLICAÇÕES E RESULTADOS**

Este capítulo trata das aplicações dos modelos de otimização global e de confiabilidade a redes utilizadas como exemplos pela literatura e a redes já implantadas. São realizadas 4 aplicações visando a demonstração e a avaliação dos modelos estudados e Também são apresentadas comparações com resultados de outros estudos e com projetos originais das redes existentes.

A primeira aplicação é conduzida em uma rede hipotética de dois anéis amplamente utilizada por diversos autores para testes de modelos de otimização, particularmente Alperovits e Shamir (1977). A aplicação tem o objetivo de demonstrar as formulações dos modelos estudados e avaliar seus desempenhos.

A segunda aplicação refere-se a parte do sistema de distribuição de água do bairro do Bessa, em João Pessoa, Paraíba. O sistema, utilizado por Formiga (1999) na aplicação de seu modelo, é composto por redes malhadas conectadas por um chamado grande anel, no qual é aplicado o modelo proposto. O objetivo aqui é a comparação dos resultados do modelo proposto com os dos estudos realizados.

A terceira aplicação é feita na rede da cidade de Apucarana, Paraná, utilizada por Vieira (1980) e Koide (1984) para avaliação de seus modelos de otimização. tem o objetivo de testar os modelos em uma rede de maior porte, comparar resultados com outros modelos e verificar as adaptações desenvolvidas para o caso de expansão de redes.

Na quarta aplicação, é utilizada a rede da cidade do Paranoá, Distrito Federal, projetada em 1991 pela ETEP Estudos Técnicos e Projetos para atender 60.000 habitantes. Como objetivos, a aplicação pretende verificar a performance dos modelos em uma rede de médio porte que possui trechos existentes e em paralelo e explorar seus usos potenciais.

### **7.1 EXEMPLO Nº 1 – REDE DE DOIS ANÉIS**

A primeira aplicação é feita na rede hipotética apresentada por Alperovits e Shamir (1977) e utilizada, posteriormente, por diversos autores para aplicação de modelos de otimização. Existem algumas variantes do problema original proposto que diferem entre si na especificação dos diâmetros possíveis em cada trecho. Com o intuito de demonstrar a formulação do modelo, é utilizado o caso em que 5 diâmetros comerciais são disponíveis para cada trecho.

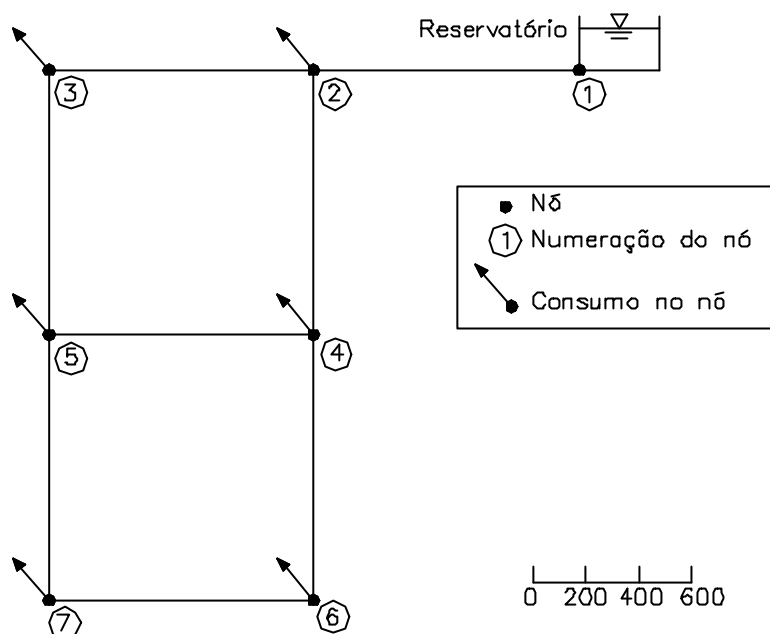


Figura 7.1 – Configuração da rede de dois anéis (exemplo n.º 1).

A rede é composta por dois anéis, sete nós e oito trechos, sendo alimentada, por gravidade, por apenas um reservatório, conforme a configuração apresentada na figura 7.1. Todos os trechos possuem 1.000 metros de comprimento e coeficiente de rugosidade de Hazen Williams igual a 130. A carga hidráulica mínima é de 30 metros e a máxima corresponde à cota do reservatório, que é fixada em 210 metros. Os dados referentes aos diâmetros disponíveis em cada trecho constam da tabela 7.1. Os dados referentes aos nós e aos trechos constam da tabela 7.2 e 7.3, respectivamente.

Tabela 7.1 – Dados dos diâmetros disponíveis da rede de dois anéis.

N.º	Diâmetro		Coeficiente de Hazen Williams – Chw	a (equação 7.1)	Custo (U.M./m)
	(pol)	(cm)			
3	3	7,62	130	$9,37 \cdot 10^{-5}$	8
4	4	10,16	130	$2,31 \cdot 10^{-5}$	11
5	6	15,24	130	$3,20 \cdot 10^{-6}$	16
6	8	20,32	130	$7,89 \cdot 10^{-7}$	23
7	10	25,40	130	$2,66 \cdot 10^{-7}$	32
8	12	30,48	130	$1,10 \cdot 10^{-7}$	50
9	14	35,56	130	$5,17 \cdot 10^{-8}$	60
10	16	40,64	130	$2,70 \cdot 10^{-8}$	90
11	18	45,72	130	$1,52 \cdot 10^{-8}$	130
12	20	50,80	130	$9,10 \cdot 10^{-9}$	170

U.M. = Unidades Monetárias

Tabela 7.2 – Dados dos nós da rede de dois anéis.

Nó	Demanda (m³/h)	Cota do terreno (m)	z min (m)	z max (m)
1	1.120	210	210	210
2	-100	150	180	210
3	-100	160	190	210
4	-120	155	185	210
5	-270	150	180	210
6	-330	165	195	210
7	-200	160	190	210

z min = Cota piezométrica mínima admissível no nó;  
z max = Cota piezométrica máxima admissível no nó.

Tabela 7.3 – Dados dos trechos da rede de dois anéis.

Trecho		L (m)	Qmin (m³/h)	Vmin	Qmax (m³/h)	Vmax	Diâmetros disponíveis (pol)
Nó M	Nó J						
1	2	1.000	1.120	443.763,70	1.120	443.763,70	12; 14; 16; 18; 20
2	3	1.000	0	0,00	1.020	373.187,87	6; 8; 10; 12; 14
2	4	1.000	0	0,00	1.020	373.187,87	10; 12; 14; 16; 18
3	5	1.000	-100	-5.058,25	920	308.272,69	6; 8; 10; 12; 14
4	5	1.000	-650	-162.000,19	900	295.976,43	3; 4; 6; 8; 10
4	6	1.000	-120	-7.089,96	900	295.976,43	10; 12; 14; 16; 18
5	7	1.000	-370	-57.057,09	650	162.000,19	6; 8; 10; 12; 14
6	7	1.000	-450	-81.987,86	570	127.022,38	8; 10; 12; 14; 16

Nó M = Nó a montante;

Nó J = Nó a jusante;

Qmin = Vazão mínima possível no trecho;

Qmax = Vazão máxima possível no trecho;

L = Comprimento do trecho;

Vmin e Vmax = Conforme equação 5.5.

### 7.1.1 Aplicação do Modelo Otimização

Na aplicação do modelo de otimização, para fins de comparação com os resultados da literatura, é utilizada a equação 7.1 como equação de perda de carga, em que a vazão é dada em  $m^3/h$ , o comprimento em  $m$  e o diâmetro em  $cm$ . Com o intuito de demonstração da montagem dos problemas relaxado e exato, são apresentadas, a seguir, a função objetivo e as restrições obtidas para o primeiro exemplo. A diferença pré estabelecida e a ser atingida pelo modelo entre os limites inferior e superior da função objetivo é de 0,005.

$$\Delta H_{ij}(Q_{ij}, x_{ijk}) = \sum_{k=1}^{NK} 15200 \cdot \frac{\text{sinal}(Q_{ij}) \cdot |Q_{ij}|^{1,852} \cdot x_{ijk}}{Chw_k^{1,852} \cdot D_k^{4,87}} = \sum_{k=1}^{NK} a_k \cdot \text{sinal}(Q_{ij}) \cdot |Q_{ij}|^{1,852} \cdot x_{ijk} \quad (7.1)$$

A função objetivo do problema relaxado é expressa pela equação 7.2, em termos das variáveis de decisão  $u$  e  $y$ , definidas para cada subtrecho da rede. Assim, existem 80 variáveis de decisão na função objetivo, sendo 10 para cada um dos 8 trechos. Como será

apresentado, o número de restrições chega a 101. Com a resolução do problema relaxado, tem início o algoritmo *Branch and Bound* para busca da solução ótima, admitindo-se como limites inferior e superior iniciais os valores 0 e  $9 \cdot 10^{16}$ , respectivamente.

Minimizar:

$$\begin{aligned}
& 50 (u_{12\ 8}+y_{12\ 8}) + 60 (u_{12\ 9}+y_{12\ 9}) + 90 (u_{12\ 10}+y_{12\ 10}) + 130 (u_{12\ 11}+y_{12\ 11}) + 170 (u_{12\ 12}+y_{12\ 12}) \\
& + 16 (u_{23\ 5}+y_{23\ 5}) + 23 (u_{23\ 6}+y_{23\ 6}) + 32 (u_{23\ 7}+y_{23\ 7}) + 50 (u_{23\ 8}+y_{23\ 8}) + 60 (u_{23\ 9}+y_{23\ 9}) \\
& + 32 (u_{24\ 7}+y_{24\ 7}) + 50 (u_{24\ 8}+y_{24\ 8}) + 60 (u_{24\ 9}+y_{24\ 9}) + 90 (u_{24\ 10}+y_{24\ 10}) + 130 (u_{24\ 11}+y_{24\ 11}) \\
& + 16 (u_{35\ 5}+y_{35\ 5}) + 23 (u_{35\ 6}+y_{35\ 6}) + 32 (u_{35\ 7}+y_{35\ 7}) + 50 (u_{35\ 8}+y_{35\ 8}) + 60 (u_{35\ 9}+y_{35\ 9}) \\
& + 8 (u_{45\ 3}+y_{45\ 3}) + 11 (u_{45\ 4}+y_{45\ 4}) + 16 (u_{45\ 5}+y_{45\ 5}) + 23 (u_{45\ 6}+y_{45\ 6}) + 32 (u_{45\ 7}+y_{45\ 7}) \\
& + 32 (u_{46\ 7}+y_{46\ 7}) + 50 (u_{46\ 8}+y_{46\ 8}) + 60 (u_{46\ 9}+y_{46\ 9}) + 90 (u_{46\ 10}+y_{46\ 10}) + 130 (u_{46\ 11}+y_{46\ 11}) \\
& + 16 (u_{57\ 5}+y_{57\ 5}) + 23 (u_{57\ 6}+y_{57\ 6}) + 32 (u_{57\ 7}+y_{57\ 7}) + 50 (u_{57\ 8}+y_{57\ 8}) + 60 (u_{57\ 9}+y_{57\ 9}) \\
& + 23 (u_{67\ 6}+y_{67\ 6}) + 32 (u_{67\ 7}+y_{67\ 7}) + 50 (u_{67\ 8}+y_{67\ 8}) + 60 (u_{67\ 9}+y_{67\ 9}) + 90 (u_{67\ 10}+y_{67\ 10})
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Em que:

$u_{ij\ k}$  : Variável de decisão do segmento de diâmetro  $k$  do trecho  $ij$ ;

$y_{ij\ k}$  : Variável de decisão do segmento de diâmetro  $k$  do trecho  $ij$ .

As restrições do problema relaxado derivam das equações 5.25 e são apresentadas a seguir. As equações de conservação de energia são formuladas para cada trecho da rede, resultando em 8 restrições (equações 7.3).

#### Conservação de energia nos trechos

$$\begin{aligned}
& 4,86 \cdot 10^{-2} u_{12\ 8} + 2,30 \cdot 10^{-2} u_{12\ 9} + 1,20 \cdot 10^{-2} u_{12\ 10} + 6,75 \cdot 10^{-2} u_{12\ 11} + 4,04 \cdot 10^{-2} u_{12\ 12} + \\
& 4,86 \cdot 10^{-2} y_{12\ 8} + 2,30 \cdot 10^{-2} y_{12\ 9} + 1,20 \cdot 10^{-2} y_{12\ 10} + 6,75 \cdot 10^{-2} y_{12\ 11} + 4,04 \cdot 10^{-2} y_{12\ 12} \\
& - H_1 + H_2 = 60
\end{aligned} \tag{7.3a}$$

$$\begin{aligned}
& 1,20 y_{23\ 5} + 2,95 \cdot 10^{-1} y_{23\ 6} + 9,94 \cdot 10^{-2} y_{23\ 7} + 4,09 \cdot 10^{-2} y_{23\ 8} + 1,93 \cdot 10^{-2} y_{23\ 9} \\
& - H_2 + H_3 = -10
\end{aligned} \tag{7.3b}$$

$$\begin{aligned}
& 9,94 \cdot 10^{-2} y_{24\ 7} + 4,09 \cdot 10^{-2} y_{24\ 8} + 1,93 \cdot 10^{-2} y_{24\ 9} + 1,01 \cdot 10^{-2} y_{24\ 10} + 5,68 \cdot 10^{-3} y_{24\ 11} \\
& - H_2 + H_4 = -5
\end{aligned} \tag{7.3c}$$

$$\begin{aligned}
& -1,62 \cdot 10^{-2} u_{35\ 5} - 3,99 \cdot 10^{-3} u_{35\ 6} - 1,35 \cdot 10^{-3} u_{35\ 7} - 5,54 \cdot 10^{-4} u_{35\ 8} - 2,62 \cdot 10^{-4} u_{35\ 9} \\
& + 9,88 \cdot 10^{-1} y_{35\ 5} + 2,43 \cdot 10^{-1} y_{35\ 6} + 8,21 \cdot 10^{-2} y_{35\ 7} + 3,38 \cdot 10^{-2} y_{35\ 8} + 1,59 \cdot 10^{-2} y_{35\ 9} \\
& - H_3 + H_5 = 10
\end{aligned} \tag{7.3d}$$

$$\begin{aligned}
& -15,18 u_{45\ 3} - 3,74 u_{45\ 4} - 5,19 \cdot 10^{-1} u_{45\ 5} - 1,28 \cdot 10^{-1} u_{45\ 6} - 4,31 \cdot 10^{-2} u_{45\ 7} \\
& + 27,73 y_{45\ 3} - 6,83 y_{45\ 4} - 9,48 \cdot 10^{-1} y_{45\ 5} - 2,34 \cdot 10^{-1} y_{45\ 6} - 7,88 \cdot 10^{-2} y_{45\ 7} - H_4 + H_5 = 5
\end{aligned} \tag{7.3e}$$

$$\begin{aligned}
& -1,89 \cdot 10^{-3} u_{46\ 7} - 7,77 \cdot 10^{-4} u_{46\ 8} - 3,67 \cdot 10^{-4} u_{46\ 9} - 1,91 \cdot 10^{-4} u_{46\ 10} - 1,08 \cdot 10^{-4} u_{46\ 11} \\
& + 7,88 \cdot 10^{-2} y_{46\ 7} + 3,24 \cdot 10^{-2} y_{46\ 8} + 1,53 \cdot 10^{-2} y_{46\ 9} + 7,99 \cdot 10^{-3} y_{46\ 10} + 4,50 \cdot 10^{-3} y_{46\ 11} \\
& - H_4 + H_6 = -10
\end{aligned} \tag{7.3f}$$

$$\begin{aligned}
& -1,83 \cdot 10^{-1} u_{57\ 5} - 4,50 \cdot 10^{-2} u_{57\ 6} - 1,52 \cdot 10^{-2} u_{57\ 7} - 6,25 \cdot 10^{-3} u_{57\ 8} - 2,95 \cdot 10^{-3} u_{57\ 9} \\
& + 5,19 \cdot 10^{-1} y_{57\ 5} + 1,28 \cdot 10^{-1} y_{57\ 6} + 4,31 \cdot 10^{-2} y_{57\ 7} + 1,77 \cdot 10^{-2} y_{57\ 8} + 8,38 \cdot 10^{-3} y_{57\ 9} \\
& - H_5 + H_7 = -10
\end{aligned} \tag{7.3g}$$

$$\begin{aligned}
& -6,47 \cdot 10^{-2} u_{67\ 6} - 2,18 \cdot 10^{-2} u_{67\ 7} - 8,98 \cdot 10^{-3} u_{67\ 8} - 4,24 \cdot 10^{-3} u_{67\ 9} - 2,21 \cdot 10^{-3} u_{67\ 10} \\
& + 1,00 \cdot 10^{-1} y_{67\ 6} + 3,38 \cdot 10^{-2} y_{67\ 7} + 1,39 \cdot 10^{-2} y_{67\ 8} + 6,57 \cdot 10^{-3} y_{67\ 9} + 3,43 \cdot 10^{-3} y_{67\ 10} \\
& - H_6 + H_7 = 5
\end{aligned} \tag{7.3h}$$

As equações de conservação de massa são formuladas para cada nó da rede, resultando em 7 restrições (equações 7.4).

#### Conservação de massa nos nós

$$\text{Nó 1: } Q_{12} = 1.120 \tag{7.4a}$$

$$\text{Nó 2: } Q_{23} + Q_{24} - Q_{12} = -100 \tag{7.4b}$$

$$\text{Nó 3: } Q_{35} - Q_{23} = -100 \tag{7.4c}$$

$$\text{Nó 4: } Q_{45} + Q_{46} + Q_{24} = -120 \tag{7.4d}$$

$$\text{Nó 5: } Q_{57} - Q_{35} - Q_{45} = -270 \tag{7.4e}$$

$$\text{Nó 6: } Q_{67} - Q_{46} = -330 \tag{7.4f}$$

$$\text{Nó 7: } -Q_{57} - Q_{67} = -200 \tag{7.4g}$$

Em cada trecho, a soma dos comprimentos dos segmentos deve ser igual ao comprimento total do trecho. Assim, o somatório das variáveis de decisão  $u$  e  $y$  deve ser igual ao comprimento do trecho, resultado em 8 restrições (equações 7.5).

#### Comprimento dos trechos

$$u_{12\ 8} + u_{12\ 9} + u_{12\ 10} + u_{12\ 11} + u_{12\ 12} + y_{12\ 8} + y_{12\ 9} + y_{12\ 10} + y_{12\ 11} + y_{12\ 12} = 1.000 \tag{7.5a}$$

$$u_{23\ 5} + u_{23\ 6} + u_{23\ 7} + u_{23\ 8} + u_{23\ 9} + y_{23\ 5} + y_{23\ 6} + y_{23\ 7} + y_{23\ 8} + y_{23\ 9} = 1.000 \tag{7.5b}$$

$$u_{24\ 7} + u_{24\ 8} + u_{24\ 9} + u_{24\ 10} + u_{24\ 11} + y_{24\ 7} + y_{24\ 8} + y_{24\ 9} + y_{24\ 10} + y_{24\ 11} = 1.000 \tag{7.5c}$$

$$u_{35\ 5} + u_{35\ 6} + u_{35\ 7} + u_{35\ 8} + u_{35\ 9} + y_{35\ 5} + y_{35\ 6} + y_{35\ 7} + y_{35\ 8} + y_{35\ 9} = 1.000 \tag{7.5d}$$

$$u_{45\ 3} + u_{45\ 4} + u_{45\ 5} + u_{45\ 6} + u_{45\ 7} + y_{45\ 3} + y_{45\ 4} + y_{45\ 5} + y_{45\ 6} + y_{45\ 7} = 1.000 \tag{7.5e}$$

$$u_{46\ 7} + u_{46\ 8} + u_{46\ 9} + u_{46\ 10} + u_{46\ 11} + y_{46\ 7} + y_{46\ 8} + y_{46\ 9} + y_{46\ 10} + y_{46\ 11} = 1.000 \quad (7.5f)$$

$$u_{57\ 5} + u_{57\ 6} + u_{57\ 7} + u_{57\ 8} + u_{57\ 9} + y_{57\ 5} + y_{57\ 6} + y_{57\ 7} + y_{57\ 8} + y_{57\ 9} = 1.000 \quad (7.5g)$$

$$u_{67\ 6} + u_{67\ 7} + u_{67\ 8} + u_{67\ 9} + u_{67\ 10} + y_{67\ 6} + y_{67\ 7} + y_{67\ 8} + y_{67\ 9} + y_{67\ 10} = 1.000 \quad (7.5h)$$

Para relacionar as variáveis  $u$  e  $q$  são formuladas equações em cada trecho, resultando em 8 restrições (equações 7.6).

### Relação entre $u$ e $q$

$$u_{12\ 8} + u_{12\ 9} + u_{12\ 10} + u_{12\ 11} + u_{12\ 12} = 1.000\ q_{12} \quad (7.6a)$$

$$u_{23\ 5} + u_{23\ 6} + u_{23\ 7} + u_{23\ 8} + u_{23\ 9} = 1.000\ q_{23} \quad (7.6b)$$

$$u_{24\ 7} + u_{24\ 8} + u_{24\ 9} + u_{24\ 10} + u_{24\ 11} = 1.000\ q_{24} \quad (7.6c)$$

$$u_{35\ 5} + u_{35\ 6} + u_{35\ 7} + u_{35\ 8} + u_{35\ 9} = 1.000\ q_{35} \quad (7.6d)$$

$$u_{45\ 3} + u_{45\ 4} + u_{45\ 5} + u_{45\ 6} + u_{45\ 7} = 1.000\ q_{45} \quad (7.6e)$$

$$u_{46\ 7} + u_{46\ 8} + u_{46\ 9} + u_{46\ 10} + u_{46\ 11} = 1.000\ q_{46} \quad (7.6f)$$

$$u_{57\ 5} + u_{57\ 6} + u_{57\ 7} + u_{57\ 8} + u_{57\ 9} = 1.000\ q_{57} \quad (7.6g)$$

$$u_{67\ 6} + u_{67\ 7} + u_{67\ 8} + u_{67\ 9} + u_{67\ 10} = 1.000\ q_{67} \quad (7.6h)$$

As aproximações lineares da equação 5.8f são formuladas para cada trecho de acordo com o caso (1, 2 ou 3), definido a partir dos limites de vazão e os valores de  $q_B$  e  $q_C$ . Assim, são formuladas 27 restrições (equações 7.7).

### Aproximações lineares

$$Q_{12} = 1.120 \quad (7.7a)$$

$$Q_{23} \geq (1-\theta_{23})1.020 \quad (7.7b)$$

$$Q_{23} \leq 1.020 - 550,76\ \theta_{23} \quad (7.7c)$$

$$Q_{23} \leq 701,55 - 757,61\ (\theta_{23} - 0,5) \quad (7.7d)$$

$$Q_{23} \leq 294,20 - 588,56\ (\theta_{23} - 0,9) \quad (7.7e)$$

$$Q_{24} \geq (1-\theta_{24})1.020 \quad (7.7f)$$

$$Q_{24} \leq 1.020 - 550,76\ \theta_{24} \quad (7.7g)$$

$$Q_{24} \leq 701,55 - 757,61\ (\theta_{24} - 0,5) \quad (7.7h)$$

$$Q_{24} \leq 294,20 - 588,56\ (\theta_{24} - 0,9) \quad (7.7i)$$

$$Q_{35} \leq 39,82 - 7.329,47\ (\theta_{35} - 0,98) \quad (7.7j)$$

$$Q_{35} \leq 920 - 504,91\ \theta_{35} \quad (7.7l)$$

$$Q_{35} \geq -100 - 1.020\ (\theta_{35} - 1) \quad (7.7m)$$

$$Q_{45} \leq 258,84 - 2.174,19\ (\theta_{45} - 0,58) \quad (7.7n)$$

$$Q_{45} \geq -358,40 - 1.647,73 (\theta_{45} - 0,76) \quad (7.7o)$$

$$Q_{45} \leq 900 - 751,95 \theta_{45} \quad (7.7p)$$

$$Q_{45} \geq -650 - 992,20 (\theta_{45} - 1) \quad (7.7q)$$

$$Q_{46} \leq 47,79 - 6.068,84 (\theta_{46} - 0,97) \quad (7.7r)$$

$$Q_{46} \leq 900 - 497,60 \theta_{46} \quad (7.7t)$$

$$Q_{46} \geq -120 - 1.020 (\theta_{46} - 1) \quad (7.7u)$$

$$Q_{57} \leq 147,34 - 1.680,76 (\theta_{57} - 0,69) \quad (7.7v)$$

$$Q_{57} \geq -258,84 - 1.039,94 (\theta_{57} - 0,87) \quad (7.7x)$$

$$Q_{57} \leq 650 - 474,59 \theta_{57} \quad (7.7z)$$

$$Q_{57} \geq -370 - 767,02 (\theta_{57} - 1) \quad (7.7aa)$$

$$Q_{67} \leq 179,20 - 1.357,34 (\theta_{67} - 0,54) \quad (7.7ab)$$

$$Q_{67} \geq -226,98 - 1.109,73 (\theta_{67} - 0,72) \quad (7.7ac)$$

$$Q_{67} \leq 570 - 506,43 \theta_{67} \quad (7.7ad)$$

$$Q_{67} \geq -450 - 619,43 (\theta_{67} - 1) \quad (7.7ae)$$

Em cada nó, as cargas hidráulicas devem obedecer aos limites mínimos e máximos, resultando em 14 restrições de simples limitação de variáveis (equações 7.8).

#### Cargas hidráulicas mínimas e máximas

$$210 \leq H_1 \leq 210 \quad (7.8a)$$

$$180 \leq H_2 \leq 210 \quad (7.8b)$$

$$190 \leq H_3 \leq 210 \quad (7.8c)$$

$$185 \leq H_4 \leq 210 \quad (7.8d)$$

$$180 \leq H_5 \leq 210 \quad (7.8e)$$

$$195 \leq H_6 \leq 210 \quad (7.8f)$$

$$190 \leq H_7 \leq 210 \quad (7.8g)$$

Em cada trecho, as vazões devem obedecer aos limites mínimos e máximos, resultando em 16 restrições de simples limitação de variáveis (equações 7.9).

#### Vazões mínimas e máximas

$$1.120 \leq Q_{12} \leq 1.120 \quad (7.9a)$$

$$0 \leq Q_{23} \leq 1.020 \quad (7.9b)$$

$$0 \leq Q_{24} \leq 1.020 \quad (7.9c)$$

$$-100 \leq Q_{35} \leq 920 \quad (7.9d)$$

$$-650 \leq Q_{45} \leq 900 \quad (7.9e)$$



$$-120 \leq Q_{46} \leq 900 \quad (7.9f)$$

$$-370 \leq Q_{57} \leq 650 \quad (7.9g)$$

$$-450 \leq Q_{67} \leq 570 \quad (7.9g)$$

Em cada trecho, as variáveis  $q$  devem variar entre 0 e 1, resultando em 16 restrições de simples limitação de variáveis (equações 7.10).

#### $\theta$ mínimos e máximos

$$0 \leq \theta_{12} \leq 1 \quad (7.10a)$$

$$0 \leq \theta_{23} \leq 1 \quad (7.10b)$$

$$0 \leq \theta_{24} \leq 1 \quad (7.10c)$$

$$0 \leq \theta_{35} \leq 1 \quad (7.10d)$$

$$0 \leq \theta_{45} \leq 1 \quad (7.10e)$$

$$0 \leq \theta_{46} \leq 1 \quad (7.10f)$$

$$0 \leq \theta_{57} \leq 1 \quad (7.10g)$$

$$0 \leq \theta_{67} \leq 1 \quad (7.10h)$$

Além dessas restrições, todas as variáveis devem assumir apenas valores positivos, como padronizado em muitos modelos de programação linear. A exceção fica por conta das vazões nos trechos, que podem ser positivas ou negativas a depender da direção do fluxo.

A resolução do problema relaxado (7.2 a 7.10) gera os resultados apresentados na tabela 7.4 e o limite inferior global, que atualiza o valor inicial. Os valores de  $d$  são determinados pela equação 5.28, a fim de se identificar qual trecho terá seu intervalo de vazões partido.

Tabela 7.4 – Resultados da resolução do primeiro problema relaxado da rede de dois anéis.

Função Objetivo (U.M)		255.206						
Trecho		Vazão (m³/h)	q	d	D (pol)	X1 (m)	X2 (m)	X3 (m)
Nó M	Nó J							
1	2	1.120,00	0,000	0,0	16	1.000,00	-	-
2	3	526,40	0,731	251,1	6,12,14	731,18	131,29	137,53
2	4	493,60	0,775	17,0	10,14,16	774,48	206,11	19,41
3	5	426,40	0,928	47,7	6,8	928,18	71,82	-
4	5	233,60	0,594	2.082,5	3,4	892,14	107,86	-
4	6	139,99	0,957	3,6	10,14	957,16	42,84	-
5	7	390,01	0,548	166,3	6,8	604,49	395,51	-
6	7	-190,01	0,685	0,4	8	1.000,00	-	-

Nó M = Nó a montante;

Nó J = Nó a jusante;

U.M. = Unidades Monetárias.

X1, X2, X3 = Comprimentos dos segmentos do trecho.

A distribuição de vazões assim obtida é fixada para a formulação do problema exato, apresentada nas equações 7.11 a 7.14. A resolução desse problema resulta em um limite superior global para a função objetivo, associado a um projeto viável da rede. Entretanto, tal problema é impossível, o que mostra que não existe um projeto de mínimo custo que resulte na distribuição de vazões da tabela 7.4.

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar:} \quad & 50 x_{12\ 8} + 60 x_{12\ 9} + 90 x_{12\ 10} + 130 x_{12\ 11} + 170 x_{12\ 12} + \\
 & 16 x_{23\ 5} + 23 x_{23\ 6} + 32 x_{23\ 7} + 50 x_{23\ 8} + 60 x_{23\ 9} + \\
 & 32 x_{24\ 7} + 50 x_{24\ 8} + 60 x_{24\ 9} + 90 x_{24\ 10} + 130 x_{24\ 11} + \\
 & 16 x_{35\ 5} + 23 x_{35\ 6} + 32 x_{35\ 7} + 50 x_{35\ 8} + 60 x_{35\ 9} + \\
 & 8 x_{45\ 3} + 11 x_{45\ 4} + 16 x_{45\ 5} + 23 x_{45\ 6} + 32 x_{45\ 7} + \\
 & 32 x_{46\ 7} + 50 x_{46\ 8} + 60 x_{46\ 9} + 90 x_{46\ 10} + 130 x_{46\ 11} + \\
 & 16 x_{57\ 5} + 23 x_{57\ 6} + 32 x_{57\ 7} + 50 x_{57\ 8} + 60 x_{57\ 9} + \\
 & 23 x_{67\ 6} + 32 x_{67\ 7} + 50 x_{67\ 8} + 60 x_{67\ 9} + 90 x_{67\ 10}
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
 & 4,86 \cdot 10^{-2} x_{12\ 8} + 2,30 \cdot 10^{-2} x_{12\ 9} + 1,20 \cdot 10^{-2} x_{12\ 10} + 6,75 \cdot 10^{-2} x_{12\ 11} + 4,04 \cdot 10^{-2} x_{12\ 12} + \\
 & - H_1 + H_2 = 60
 \end{aligned} \tag{7.12a}$$

$$\begin{aligned}
 & 3,51 \cdot 10^{-1} x_{23\ 5} + 8,65 \cdot 10^{-2} x_{23\ 6} + 2,92 \cdot 10^{-2} x_{23\ 7} + 1,20 \cdot 10^{-2} x_{23\ 8} + 5,67 \cdot 10^{-3} x_{23\ 9} \\
 & - H_2 + H_3 = -10
 \end{aligned} \tag{7.12b}$$

$$\begin{aligned}
 & 2,59 \cdot 10^{-2} x_{24\ 7} + 1,07 \cdot 10^{-2} x_{24\ 8} + 5,03 \cdot 10^{-3} x_{24\ 9} + 2,63 \cdot 10^{-3} x_{24\ 10} + 1,48 \cdot 10^{-3} x_{24\ 11} \\
 & - H_2 + H_4 = -5
 \end{aligned} \tag{7.12c}$$

$$\begin{aligned}
 & 2,38 \cdot 10^{-1} x_{35\ 5} + 5,86 \cdot 10^{-2} x_{35\ 6} + 1,98 \cdot 10^{-2} x_{35\ 7} + 8,13 \cdot 10^{-3} x_{35\ 8} + 3,84 \cdot 10^{-3} x_{35\ 9} \\
 & - H_3 + H_5 = 10
 \end{aligned} \tag{7.12d}$$

$$\begin{aligned}
 & 2,28 x_{45\ 3} + 5,62 \cdot 10^{-1} x_{45\ 4} + 7,80 \cdot 10^{-2} x_{45\ 5} + 1,92 \cdot 10^{-2} x_{45\ 6} + 6,48 \cdot 10^{-3} x_{45\ 7} \\
 & - H_4 + H_5 = 5
 \end{aligned} \tag{7.12e}$$

$$\begin{aligned}
 & 2,51 \cdot 10^{-3} x_{46\ 7} + 1,03 \cdot 10^{-3} x_{46\ 8} + 4,88 \cdot 10^{-4} x_{46\ 9} + 2,55 \cdot 10^{-4} x_{46\ 10} + 1,43 \cdot 10^{-4} x_{46\ 11} \\
 & - H_4 + H_6 = -10
 \end{aligned} \tag{7.12f}$$

$$\begin{aligned}
 & 2,02 \cdot 10^{-1} x_{57\ 5} + 4,96 \cdot 10^{-2} x_{57\ 6} + 1,67 \cdot 10^{-2} x_{57\ 7} + 6,89 \cdot 10^{-3} x_{57\ 8} + 3,25 \cdot 10^{-3} x_{57\ 9} \\
 & - H_5 + H_7 = -10
 \end{aligned} \tag{7.12g}$$

$$\begin{aligned}
 & -1,31 \cdot 10^{-2} x_{67\ 6} - 4,42 \cdot 10^{-3} x_{67\ 7} - 1,82 \cdot 10^{-3} x_{67\ 8} - 8,59 \cdot 10^{-4} x_{67\ 9} - 4,48 \cdot 10^{-4} x_{67\ 10} \\
 & - H_6 + H_7 = 5
 \end{aligned} \tag{7.12h}$$

$$X_{12\ 8} + X_{12\ 9} + X_{12\ 10} + X_{12\ 11} + X_{12\ 12} = 1.000 \quad (7.13a)$$

$$X_{23\ 5} + X_{23\ 6} + X_{23\ 7} + X_{23\ 8} + X_{23\ 9} = 1.000 \quad (7.13b)$$

$$X_{24\ 7} + X_{24\ 8} + X_{24\ 9} + X_{24\ 10} + X_{24\ 11} = 1.000 \quad (7.13c)$$

$$X_{35\ 5} + X_{35\ 6} + X_{35\ 7} + X_{35\ 8} + X_{35\ 9} = 1.000 \quad (7.13d)$$

$$X_{45\ 3} + X_{45\ 4} + X_{45\ 5} + X_{45\ 6} + X_{45\ 7} = 1.000 \quad (7.13e)$$

$$X_{46\ 7} + X_{46\ 8} + X_{46\ 9} + X_{46\ 10} + X_{46\ 11} = 1.000 \quad (7.13f)$$

$$X_{57\ 5} + X_{57\ 6} + X_{57\ 7} + X_{57\ 8} + X_{57\ 9} = 1.000 \quad (7.13g)$$

$$X_{67\ 6} + X_{67\ 7} + X_{67\ 8} + X_{67\ 9} + X_{67\ 10} = 1.000 \quad (7.13h)$$

$$210 \leq H_1 \leq 210 \quad (7.14a)$$

$$180 \leq H_2 \leq 210 \quad (7.14b)$$

$$190 \leq H_3 \leq 210 \quad (7.14c)$$

$$185 \leq H_4 \leq 210 \quad (7.14d)$$

$$180 \leq H_5 \leq 210 \quad (7.14e)$$

$$195 \leq H_6 \leq 210 \quad (7.14f)$$

$$190 \leq H_7 \leq 210 \quad (7.14g)$$

A resolução do primeiro problema exato finaliza o passo 1 do algoritmo *Branch na Bound*, ficando definido o primeiro nó (ativo) da árvore de busca pelos limites 255.206,25 e  $9 \cdot 10^{16}$ , já que não foi possível encontrar um limite superior.

O passo 2 do algoritmo refere-se à subdivisão do intervalo de vazões. Os parâmetros  $\delta$ , determinados para cada trecho com base nos resultados do problema relaxado, indicam qual trecho deve ter seu intervalo de vazão partido. De acordo com a tabela 7.4, o maior valor de  $\delta$  corresponde ao trecho 45, cujos limites mínimo e máximo de vazão são, respectivamente, -650 e 900 m<sup>3</sup>/h. Esse intervalo de vazões é dividido nos dois subintervalos [-650;0] e [0,900], conforme a equação 5.28, já que o trecho enquadra-se no caso 1. Desta forma são gerados mais dois nós na árvore de busca, associados a cada subintervalo de vazão, como mostra a figura 7.2. Em cada um desses nós, os intervalos de vazão são mantidos para todos os trechos, exceto para o 4-5.

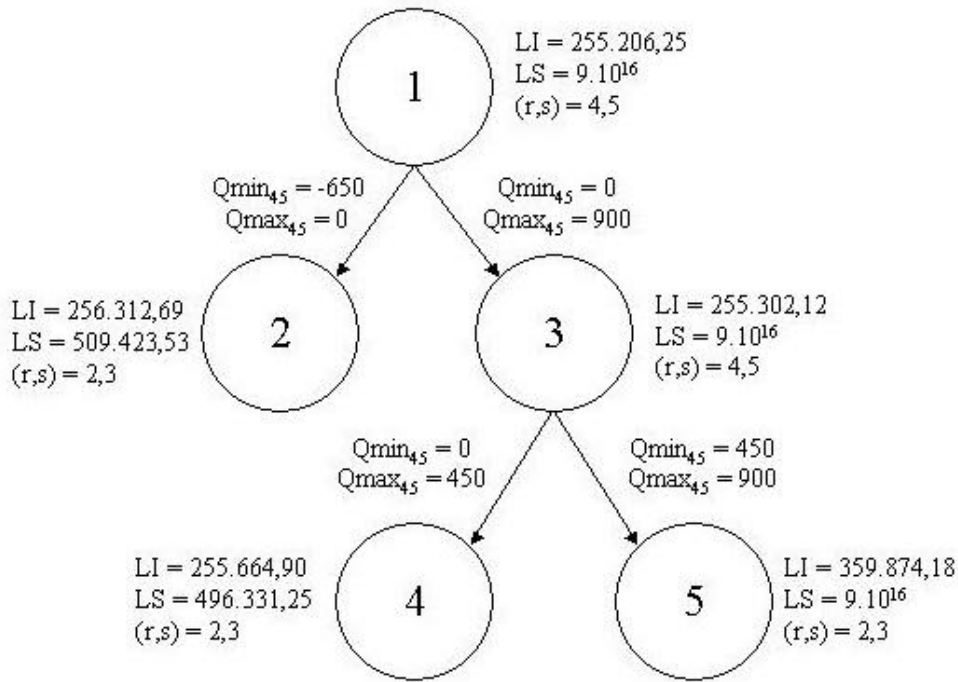


Figura 7.2 – Árvore de busca *Branch and Bound* na rede de dois anéis (5 primeiros nós).

Em cada novo nó da árvore de busca é definido um problema relaxado, mantendo-se a formulação 7.2 a 7.8 e alterando-se as restrições 7.3e, 7.7n, 7.7o, 7.7p, 7.7q e 7.9, com base nos novos intervalos de vazão, definidos para o trecho 45. A resolução desses problemas gera novos limites inferiores (LI) para a função objetivo e novas distribuições de vazão. Também são definidos problemas exatos associados a cada novo nó, seguindo a formulação das equações 7.11 a 7.14, baseadas nas distribuições de vazão obtidas em cada problema relaxado. A resolução desses problemas gera novos limites superiores (LS) para a função objetivo.

O limite superior global é atualizado pelo limite superior do nó 2, que é o menor existente. De acordo com o passo 3 do algoritmo, o nó ativo, que corresponde ao nó 1, é eliminado do processo. Se fosse o caso, também seriam eliminados os nós cujos limites inferiores são maiores do que o limite superior global e cujos problemas relaxados são impossíveis.

O novo limite inferior global corresponde ao menor existente, associado ao nó 3. No quarto passo do algoritmo, é determinada a diferença relativa entre os limites globais superior e inferior (GAP), igual a 0,49884. Como essa diferença é maior do que a pré estabelecida (0,005), o processo *Branch and Bound* continua por meio da escolha de um novo nó ativo, referente ao limite inferior global (nó 3). Esse nó é subdividido em mais dois nós, conforme o passo 2 do algoritmo. O processo segue até que a diferença relativa entre limites globais inferior e superior seja menor do que a pré especificada, o que acontece após 720

subdivisões. A solução final obtida é apresentada nas tabelas 7.5 e 7.6. A velocidade de convergência do modelo pode ser avaliada na figura 7.3, em que são mostrados os limites globais obtidos a cada subdivisão de nós da árvore de busca.

Tabela 7.5 – Resultados finais da otimização da rede de dois anéis – vazões e diâmetros.

Trecho		Vazão (m³/h)	D1 (pol)	X1 (m)	D2 (pol)	X2 (m)
Nó M	Nó J					
1	2	1.120,00	18	1.000,00	-	-
2	3	448,39	14	1.000,00	-	-
2	4	571,61	14	220,92	16	779,08
3	5	348,39	10	20,58	12	979,42
4	5	9,30	3	1.000,00	-	-
4	6	442,31	14	1.000,00	-	-
5	7	87,69	6	10,56	8	989,44
6	7	112,31	8	1.000,00	-	-
<b>Limite Superior (Custo)</b>				\$ 436.928,27		
<b>Limite Inferior (Custo)</b>				\$ 434.758,42		
<b>Nós ativos enumerados</b>				720		
<b>GAP</b>				0,00497		

Nó M = Nó a montante;  
Nó J = Nó a jusante;

D1, D2 = Diâmetros dos segmentos do trecho;  
X1, X2 = Comprimentos dos segmentos do trecho.

Tabela 7.6 – Resultados finais da otimização da rede de dois anéis – cargas hidráulicas.

Nó	Carga hidráulica (m)	Cota Piezométrica (m)
1	0,00	210,00
2	53,25	203,25
3	39,04	199,04
4	44,11	199,11
5	43,28	193,28
6	30,00	195,00
7	30,05	190,05

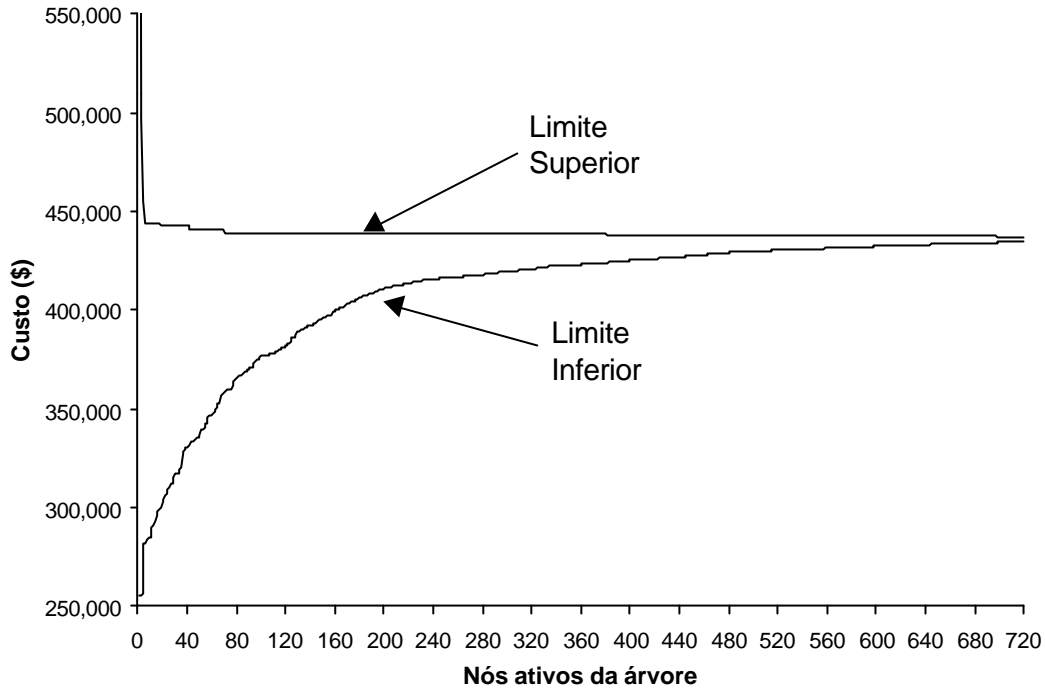


Figura 7.3 – Convergência do modelo de otimização global na rede de dois anéis.

Na formulação do problema observa-se que, mesmo em redes de pequeno porte (poucos nós e trechos) o número de variáveis e restrições é elevado. O maior número de diâmetros disponíveis por trecho aumenta significativamente o número de variáveis, ainda que sem acréscimo no número de restrições. Isso implica em tempos computacionais elevados devido à resolução dos problemas de programação linear, cuja eficiência pode definir a velocidade de processamento do modelo.

Conforme a tabela 7.5, três trechos da rede ótima são compostos por dois diâmetros (2-4, 3-5 e 5-7). Isso significa que o diâmetro ótimo desses trechos está entre dois valores comerciais, o que é tratado pelo modelo como 2 segmentos de diâmetros comerciais consecutivos. A unificação dos diâmetros desses trechos resulta em acréscimo de 0,49% em relação ao custo da rede ótima e representa vantagens construtivas.

Os trechos 4-5 e 5-7 possuem menores vazões, induzindo a uma configuração ramificada da rede. Essa configuração é impedida pelo modelo por meio da especificação dos diâmetros mínimos em cada trecho. Como mostra a tabela 7.7, os resultados encontrados são similares aos obtidos por modelos de otimização global semelhantes. O custo ótimo global é significativamente menor do que o encontrado por Alperotvits e Shamir (1977).

Tabela 7.7 – Resultados obtidos por outros estudos na rede de dois anéis – custos.

Estudo	Custo (U.M.)
Alperovits e Shamir (1977)	479.525
Sherali e Smith (1997)	436.684
Sherali <i>et al.</i> (1998)	436.915
Costa <i>et al.</i> (2001)	437.552
Modelo proposto (otimização global)	436.928
Modelo proposto (unificação pelo maior diâmetro)	439.084

U.M. = Unidades Monetárias.

### 7.1.2 Aplicação do Modelo de Análise de Confiabilidade

A rede ótima obtida pelo modelo de otimização é utilizada para demonstração do modelo de análise de confiabilidade. Esse modelo permite a mensuração da confiabilidade e a avaliação do efeito do aumento da capacidade hidráulica da rede sobre a confiabilidade e o custo, por meio do algoritmo de alteração de diâmetros.

As configurações de falha consideradas no modelo estão associadas a probabilidades de ocorrência determinadas a partir das probabilidades de operação satisfatória dos subtrechos (Pop). Nessa aplicação, essas probabilidades são estimadas em função dos respectivos diâmetros, de acordo com a equação 6.2. As probabilidades de operação satisfatória de cada trecho (P) são computadas seguindo as equações 6.4. A probabilidade de operação satisfatória simultânea de todos os trechos é dada pela equação 6.4a e as probabilidades de falha de trechos associadas ao funcionamento dos demais (PF) são dadas pela equação 6.4b. As probabilidades de falha e operação assim calculadas constam da tabela 7.8. Observa-se que as configurações de falha consideradas correspondem a 0,3111% das probabilidades de todas as configurações possíveis, alcançando 99,9996 % quando a configuração em que todos os trechos operam satisfatoriamente é considerada.

Tabela 7.8 – Probabilidades de ocorrência das configurações de falha na rede de dois anéis.

Trecho		Subtrecho 1		Subtrecho 2		P	PF
Nó M	Nó J	D (pol)	Pop	D (pol)	Pop		
1	2	18	0,99988	-	-	0,99988	0,00012
2	3	14	0,99984	-	-	0,99984	0,00016
2	4	14	0,99984	16	0,99987	0,99971	0,00029
3	5	10	0,99977	12	0,99981	0,99958	0,00042
4	5	3	0,99904	-	-	0,99904	0,00095
4	6	14	0,99984	-	-	0,99984	0,00016
5	7	6	0,99958	8	0,99970	0,99928	0,00072
6	7	8	0,99970	-	-	0,99970	0,00030
Todos		-	-	-	-	0,99689	$7,2 \cdot 10^{-29}$

Nó M = Nó a montante;

Nó J = Nó a jusante;

Os índices de performance hidráulica são determinados, em cada configuração de falha, de acordo com as equações da tabela 6.1. Para esta aplicação foram adotados os valores de 20m e 30m como carga aceitável (Hace) e carga mínima (Hmin), respectivamente. O modelo hidráulico nodal é aplicado à rede ótima da tabela 7.5 gerando as cargas hidráulicas e vazões disponíveis nodais referentes à situação em que todos os trechos estão em operação. O modelo hidráulico também é aplicado às configurações em que um dos trechos está fora de operação. As cargas hidráulicas, em metros de coluna d'água, obtidas em cada configuração de falha constam das tabelas 7.9.

Tabela 7.9 – Cargas hidráulicas da rede de dois anéis ótima sob configurações de falha.

Nó	Hmin (m)	Hace (m)	Trecho fora de operação									
			0*	1-2	2-3	2-4	3-5	4-5	4-6	5-7	6-7	
1**	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0	210,0
2	10,0	30,0	53,3	0,0	55,7	56,8	54,8	53,3	56,1	53,3	53,3	53,3
3	10,0	30,0	39,0	0,0	0,0	38,3	44,5	38,9	38,9	40,4	37,0	37,0
4	10,0	30,0	44,1	0,0	43,4	0,9	42,5	44,2	50,8	42,9	45,4	45,4
5	10,0	30,0	43,3	0,0	0,0	34,6	0,0	42,9	37,7	46,9	37,5	37,5
6	10,0	30,0	30,0	0,0	25,5	0,0	24,7	30,1	0,0	27,2	33,0	33,0
7	10,0	30,0	30,1	0,0	0,0	0,0	0,0	29,9	5,9	17,8	12,6	12,6

Cargas hidráulicas em m;

\*Caso em que todos os trechos operam;

\*\*Nó com carga hidráulica fixa (reservatório).

As vazões disponíveis são calculadas quando a carga hidráulica em algum nó, calculada pelo modelo hidráulico, resulta negativo, evidenciando a incapacidade da rede em suprir a demanda naquele nó. Nesses nós, a carga hidráulica é igualada a zero e a vazão disponível para consumo é calculada com base nas vazões obtidas pelo modelo hidráulico. Essas vazões disponíveis, em m<sup>3</sup>/h, constam da tabela 7.10, para cada configuração de falha. Quando a carga hidráulica é positiva, a demanda no nó pode ser satisfeita e a vazão disponível é igual ao consumo pré especificado.

Tabela 7.10 – Vazões disponíveis da rede de dois anéis ótima sob configurações de falha.

Nó	Qmin (m <sup>3</sup> /h)	W (m <sup>3</sup> /h)	Trecho fora de operação									
			0*	1 2	2 3	2 4	3 5	4 5	4 6	5 7	6 7	
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	10	100	100	0	100	100	100	100	100	100	100	100
3	10	100	100	0	0	100	100	100	100	100	100	100
4	12	120	120	0	120	120	120	120	120	120	120	120
5	27	270	270	0	191	270	190	270	270	270	270	270
6	33	330	330	0	330	0	330	330	46	330	330	330
7	20	200	200	0	138	165	134	200	200	200	200	200

Vazões disponíveis em m<sup>3</sup>/h;

\*Caso em que todos os trechos operam.



Observa-se que os trechos 4-5, 5-7 e 6-7, quando fora de operação, provocam apenas queda de pressão na rede, sem interrupção do suprimento dos nós. A falha dos trechos 2-3 e 2-4 impede o abastecimento dos nós 3 e 6, respectivamente, pois obriga toda a vazão da rede a passar por um desses trechos, resultando em maior perda de carga. A falha dos trechos 3-5 e 4-6 implica em cargas nulas e redução do consumo em alguns nós.

As cargas e vazões obtidas pelo modelo hidráulico (tabelas 7.8 e 7.9) são utilizadas no cálculo dos índices de performance hidráulica nodal (*PHN*) associados a cada configuração de falha. A média desses índices, ponderada pelos consumos nodais (equação 6.5), resulta no índice de performance hidráulica global (*PHG*) em cada configuração de falha. Os índices *PHN* e *PHG* são apresentados na tabela 7.11.

Tabela 7.11 – Índices de performance hidráulica *PHN* e *PHG* da rede de dois anéis ótima.

Nó	Trecho fora de operação								
	0*	1 2	2 3	2 4	3 5	4 5	4 6	5 7	6 7
1	1,000	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	1,000	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3	1,000	0,000	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
4	1,000	0,000	1,000	0,500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
5	1,000	0,000	0,337	1,000	0,336	1,000	1,000	1,000	1,000
6	1,000	0,000	0,773	0,000	0,735	1,000	0,021	0,860	1,000
7	1,000	0,000	0,328	0,402	0,317	0,995	0,500	0,500	0,500
<b>PHG</b>	1,000	0,000	0,564	0,545	0,640	0,999	0,622	0,869	0,911
<b>PF</b>	0,99677	0,00012	0,00016	0,00029	0,00042	0,00095	0,00016	0,00072	0,00030

\*Caso em que todos os trechos operam;  $PHG=PHG_0$ ;  $PF=P_0$

O índice de confiabilidade *ICF*, obtido pela equação 6.7, associa a performance global do sistema, *PHG* ou *PHG<sub>0</sub>*, à probabilidade de ocorrência da configuração de falha, *PF* ou *P<sub>0</sub>*, como mostra a equação 7.15. O índice *ICF*, em conjunto com os índices *PHN* e *PHG*, permite a quantificação da confiabilidade e serve como referência para a avaliação de alterações hidráulicas a serem efetuadas na rede otimizada.

$$\begin{aligned}
 ICF &= [(0,99677443 \cdot 1,0) + (0,00011963 \cdot 0,0) + (0,00015951 \cdot 0,56386986) + \\
 &\quad (0,00028913 \cdot 0,54496419) + (0,00041878 \cdot 0,64001841) + \\
 &\quad (0,00095782 \cdot 0,99902619) + (0,00015951 \cdot 0,62234793) + \\
 &\quad (0,00081787 \cdot 0,86940466) + (0,00029912 \cdot 0,91071429)] / 0,99999579 \\
 &= 0,99932929 / 0,99999579 = 0,99933349 \qquad (7.15)
 \end{aligned}$$

Como a probabilidade de operação de cada trecho é alta, as probabilidades de falha *PF* são baixas. Isso faz com que o índice *ICF* seja pouco influenciado pelas performances hidráulicas durante configurações de falha e seja próximo a 1, pois a performance da rede ótima na ausência de falhas é satisfatória.

Para análise do efeito do aumento de capacidade hidráulica sobre a confiabilidade e o custo é procedida a aplicação do algoritmo de alteração de diâmetros, em que o índice *ICF* é determinado a cada aumento ou unificação de diâmetros em um dado trecho. Partindo da rede otimizada (tabela 7.5), as alterações nos trechos são testadas sistematicamente, determinando-se as variações do índice *ICF* (equação 6.8), custo (equação 6.9) e da relação entre essas variações. Em cada iteração, a alteração de melhor relação entre as variações é efetuada. A título de demonstração, os resultados obtidos a cada iteração para a rede de dois anéis é apresentada na tabela 7.12.

Tabela 7.12 – Processo de alteração de diâmetros na rede de dois anéis ótima.

<b>Iteração</b>	<b>Trecho alterado</b>	<b>D ICF (%)</b>	<b>D C (%)</b>	<b>D ICF/D C (%)</b>	<b>Melhor alteração</b>
1	1-2	0,00007	0,09155	0,00082	5 7
	2-3	0,00002	0,06866	0,00027	
	2-4	0,00009	0,01517	0,00621	
	3-5	0,00008	0,00085	0,09891	
	4-5	-0,00314	0,01831	-0,17131	
	4-6	0,00008	0,06866	0,00117	
	5-7	0,00007	0,00017	0,40676	
	6-7	-0,00878	0,02060	-0,42644	
2	1-2	0,00005	0,09153	0,00056	3 5
	2-3	0,00002	0,06865	0,00025	
	2-4	0,00009	0,01517	0,00571	
	3-5	0,00008	0,00085	0,09837	
	4-5	-0,00290	0,01831	-0,15842	
	4-6	0,00006	0,06865	0,00082	
	5-7	0,00003	0,02059	0,00131	
	6-7	-0,00864	0,02059	-0,41963	
3	1-2	0,00004	0,09146	0,00048	2-4
	2-3	0,00002	0,06859	0,00025	
	2-4	0,00008	0,01515	0,00542	
	3-5	0,00002	0,02286	0,00076	
	4-5	-0,00257	0,01829	-0,14064	
	4-6	0,00004	0,06859	0,00064	
	5-7	0,00003	0,02058	0,00131	
	6-7	-0,00821	0,02058	-0,39899	

Tabela 7.12 – Processo de alteração de diâmetros aplicado à rede de dois anéis otimizada.

Iteração	Trecho alterado	D ICF (%)	D C (%)	D ICF/D C (%)	Melhor alteração
4	1-2	0,00004	0,09009	0,00047	5-7
	2-3	0,00001	0,06757	0,00022	
	2-4	0,00003	0,09009	0,00031	
	3-5	0,00001	0,02252	0,00063	
	4-5	0,00001	0,01802	0,00049	
	4-6	0,00004	0,06757	0,00063	
	5-7	0,00002	0,02027	0,00117	
	6-7	0,00002	0,02027	0,00092	
5	1-2	0,00005	0,08830	0,00053	3-5
	2-3	0,00002	0,06623	0,00033	
	2-4	0,00003	0,08830	0,00029	
	3-5	0,00003	0,02208	0,00121	
	4-5	0,00001	0,01766	0,00080	
	4-6	0,00004	0,06623	0,00059	
	6-7	0,00002	0,01987	0,00079	
6	1-2	0,00005	0,08639	0,00052	4-5
	2-3	0,00002	0,06479	0,00034	
	2-4	0,00002	0,08639	0,00028	
	4-5	0,00002	0,01728	0,00091	
	4-6	0,00004	0,06479	0,00057	
	6-7	0,00002	0,01944	0,00085	
7	1-2	0,00004	0,08493	0,00051	6-7
	2-3	0,00002	0,06369	0,00028	
	2-4	0,00003	0,08493	0,00032	
	4-6	0,00004	0,06369	0,00056	
	6-7	0,00002	0,01911	0,00091	
8	1-2	0,00005	0,08333	0,00055	4-6
	2-3	0,00002	0,06250	0,00031	
	2-4	0,00003	0,08333	0,00042	
	4-6	0,00004	0,06250	0,00067	
9	1-2	0,00004	0,07843	0,00052	1-2
	2-3	0,00002	0,05882	0,00028	
	2-4	0,00003	0,07843	0,00038	
10	2-3	0,00001	0,05455	0,00026	2-4
	2-4	0,00003	0,07273	0,00041	
11	2-3	0,00001	0,05085	0,00024	2-3

Na primeira alteração, a unificação dos diâmetros do trecho 2-4 provoca o maior incremento de confiabilidade, porém a unificação do trecho 5-7 é escolhida por levar ao menor acréscimo de custo. Dentre todas as alterações, as unificações de diâmetro resultam nas melhores relações entre custo e confiabilidade, sendo preteridas em detrimento do acréscimo de diâmetros. Assim, as três unificações possíveis são escolhidas nas três primeiras alterações do algoritmo. Um resumo das alterações é apresentado na tabela 7.13.

Verifica-se que algumas alterações provocam variações negativas de confiabilidade, mostrando que o aumento de capacidade em determinados trechos pode refletir em perdas de performance hidráulica na rede. Isso acontece porque, em alguns trechos, o aumento da capacidade hidráulica resulta em maior vazão e perda de carga, reduzindo as cargas hidráulicas e prejudicando as performances nodais.

Tabela 7.13 – Resumo do processo de alteração de diâmetros na rede de dois anéis ótima

Iteração	Trecho alterado	Confiabilidade ICF	Custo C (U.M)	D ICF (%)	D C (%)	D ICF/D C (%)
0	0	0,999333	436.928	-	-	-
1	5-7	0,999402	437.002	$6,905 \cdot 10^{-3}$	$1,694 \cdot 10^{-2}$	$4,077 \cdot 10^1$
2	3-5	0,999486	437.372	$1,531 \cdot 10^{-2}$	$1,016 \cdot 10^{-1}$	$1,507 \cdot 10^1$
3	2-4	0,999568	444.000	$2,352 \cdot 10^{-2}$	$1,619 \cdot 10^0$	$1,453 \cdot 10^0$
4	5-7	0,999591	453.000	$2,582 \cdot 10^{-2}$	$3,678 \cdot 10^0$	$7,019 \cdot 10^{-1}$
5	3-5	0,999618	463.000	$2,852 \cdot 10^{-2}$	$5,967 \cdot 10^0$	$4,779 \cdot 10^{-1}$
6	4-5	0,999634	471.000	$3,012 \cdot 10^{-2}$	$7,798 \cdot 10^0$	$3,863 \cdot 10^{-1}$
7	6-7	0,999651	480.000	$3,182 \cdot 10^{-2}$	$9,858 \cdot 10^0$	$3,228 \cdot 10^{-1}$
8	4-6	0,999693	510.000	$3,602 \cdot 10^{-2}$	$1,672 \cdot 10^1$	$2,154 \cdot 10^{-1}$
9	1-2	0,999734	550.000	$4,013 \cdot 10^{-2}$	$2,588 \cdot 10^1$	$1,551 \cdot 10^{-1}$
10	2-4	0,999764	590.000	$4,313 \cdot 10^{-2}$	$3,503 \cdot 10^1$	$1,231 \cdot 10^{-1}$
11	2-3	0,999776	620.000	$4,433 \cdot 10^{-2}$	$4,190 \cdot 10^1$	$1,058 \cdot 10^{-1}$

O algoritmo chegou ao fim quando todos os trechos sofreram alguma alteração, indicando que acréscimos de confiabilidade podem ainda ser obtidos, ainda que pouco significativos. Em termos absolutos, a variação de confiabilidade não foi expressiva, ao contrário do aumento de custo. Em termos relativos, a confiabilidade aumentou 0,04% e o custo 41,90%.

A reduzida variação da confiabilidade deve-se aos valores adotados para  $H_{min}$  e  $H_{ace}$ . Como esses parâmetros associam  $PHN=1$  quando as cargas mínimas são atendidas e a alteração de diâmetros parte de uma configuração que já atende a esses limites, o aumento de capacidade hidráulica tem efeito reduzido sobre as performances nodais, em termos absolutos. Variando-se os índices  $H_{min}$  e  $H_{ace}$ , a análise pode ser feita em outras faixas de carga hidráulica, visando a melhor mensuração da confiabilidade.

Como mostra a figura 7.4, a variação da confiabilidade com o custo cresce verticalmente nas primeiras iterações, tendendo a uma estabilização após um determinado nível de confiabilidade. Portanto, podem existir diversos projetos de redes com custos próximos ao ótimo e com confiabilidades variáveis. Além disso, existe um nível máximo de confiabilidade em que os investimentos em ampliação da capacidade não geram benefícios em termos de performance, para um dado par de valores  $H_{min}$  e  $H_{ace}$  pré estabelecido.

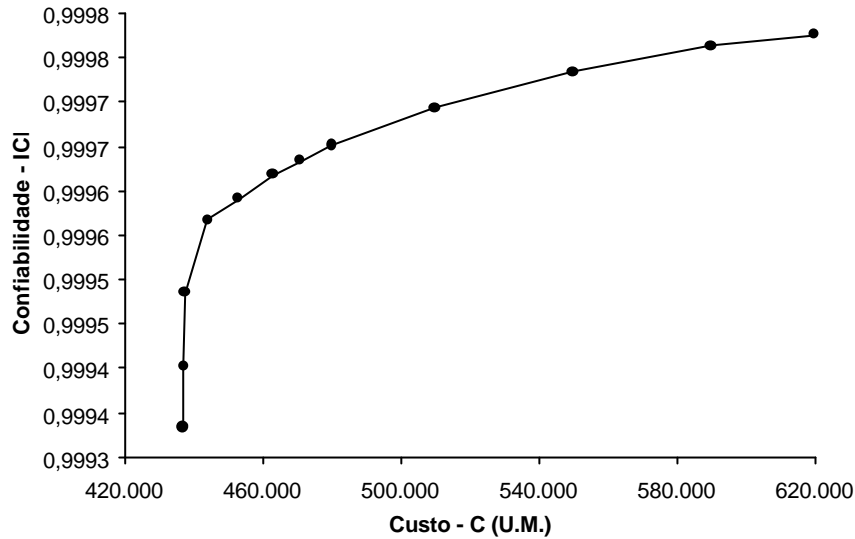


Figura 7.4 – Variação da confiabilidade em relação ao custo na rede de dois anéis.

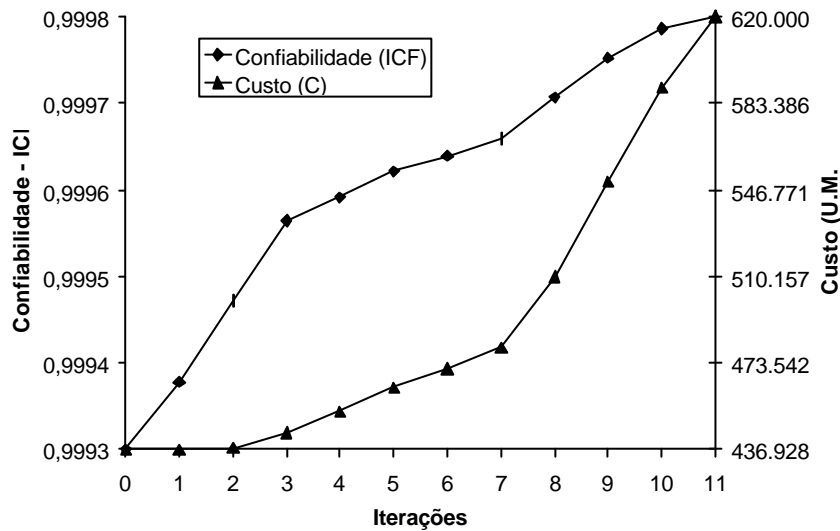


Figura 7.5 – Evolução da confiabilidade e do custo a cada iteração na rede de dois anéis.

A figura 7.5 mostra o rápido crescimento da confiabilidade nas primeiras alterações em detrimento da reduzida variação de custo. Após um determinado ponto, os acréscimos de custo tornam-se mais expressivos e a confiabilidade reduz sua taxa de crescimento.

Nos trechos compostos por 2 diâmetros da rede de custo ótimo, os segmentos de maior comprimento são, também, os de maior diâmetro. Assim, a unificação pelo maior diâmetro, executada pelo processo de alteração de diâmetros, resulta nos menores custos possíveis, pois os comprimentos dos segmentos que terão o diâmetro incrementado são os menores em cada trecho. Por outro lado, a unificação aumenta a probabilidade de operação do trecho, que deixa de ser computada como o produto das probabilidades de cada segmento.

A figura 7.6 mostra que a relação entre confiabilidade e custo cai rapidamente nas primeiras alterações. Isso acontece devido à taxa de crescimento do custo que aumenta a cada alteração, enquanto que a taxa de crescimento de confiabilidade diminui. As três primeiras e maiores relações mostradas na figura 7.6 referem-se justamente às unificações de diâmetros de trechos e identificam as melhores alterações.

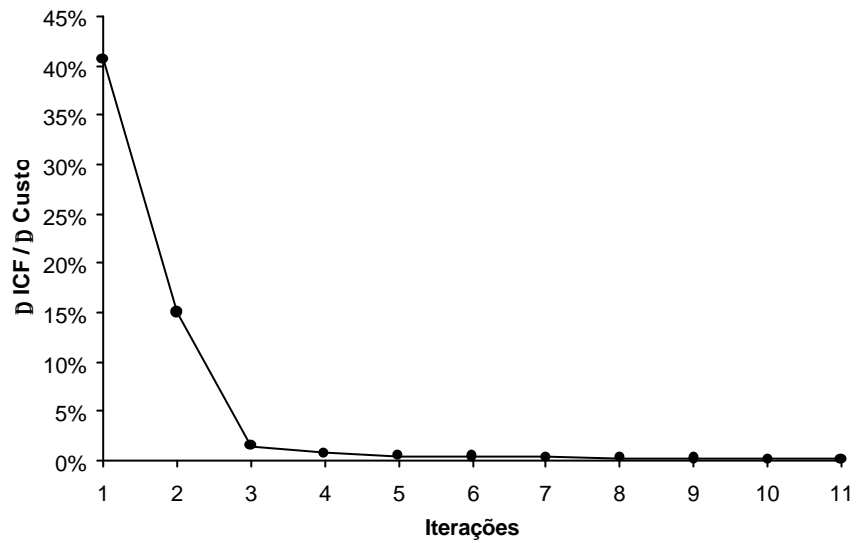


Figura 7.6 – Variação da relação  $\Delta ICF / \Delta C$  na rede de dois anéis.

## 7.2 EXEMPLO Nº 2 – REDE DO BAIRRO DO BESSA

A segunda aplicação refere-se o dimensionamento de parte do sistema de distribuição de água do Bairro do Bessa da cidade de João Pessoa, Estado da Paraíba. O objetivo é a avaliação do desempenho do modelo de otimização proposto em relação a outros modelos já aplicados ao caso.

A rede foi projetada pela Companhia de Água e Esgotos da Paraíba – CAGEPA, em 1982, e utilizada por Leal (1995), na aplicação dos modelos GRANADOS, apresentada em Gomes (1997), e de enumeração exaustiva de Walski *et al.* (1990), e por Formiga (1999), na aplicação de um modelo de programação não linear. A rede é composta por um grande anel que abastece 5 setores, onde a distribuição se dá por redes malhadas. Para fins de comparação entre modelos, a aplicação é conduzida apenas no grande anel, que representa cerca de 70% do custo de todo o sistema.

O grande anel é constituído por 7 nós e 7 trechos, conforme a figura 7.7. Em cada trecho são possíveis 10 diâmetros comerciais, cujas características constam da tabela 7.14. Para diâmetros de até 250 mm são utilizados tubos de PVC com coeficiente de rugosidade  $Chw=145$  e para diâmetros maiores ou iguais a 300 mm são utilizados tubos de ferro dúctil com coeficiente de rugosidade  $Chw=130$ .

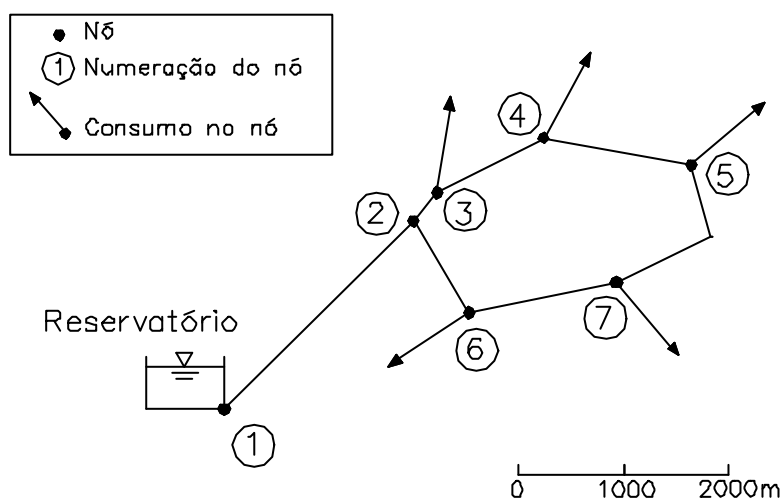


Figura 7.7 – Configuração da rede do Bessa (exemplo n.º 2).

Tabela 7.14 – Dados dos diâmetros disponíveis da rede do Bessa.

Diâmetro		Chw	a (equação 7.1)	Custo (U.M./m)
N.º	(mm)			
1	100	145	$2,04 \cdot 10^{-5}$	1.629,00
2	150	145	$2,83 \cdot 10^{-6}$	4.054,00
3	200	145	$6,97 \cdot 10^{-7}$	5.769,00
4	250	145	$2,35 \cdot 10^{-7}$	7.718,00
5	300	130	$1,18 \cdot 10^{-7}$	9.237,00
6	350	130	$5,59 \cdot 10^{-8}$	11.012,00
7	400	130	$2,92 \cdot 10^{-8}$	12.397,00
8	450	130	$1,64 \cdot 10^{-8}$	15.501,00
9	500	130	$9,84 \cdot 10^{-9}$	17.696,00
10	600	130	$4,05 \cdot 10^{-9}$	23.132,00

U.M. = Unidades Monetárias

A cota piezométrica do reservatório é fixada em 54 metros e as cargas hidráulicas nos nós são limitadas entre 25 e a correspondente à cota do reservatório. O alto limite mínimo de carga hidráulica é necessário para que as redes conectadas nos nós do grande anel tenham pressão suficiente. Os dados dos nós são apresentados na tabela 7.15.

Tabela 7.15 – Dados dos nós da rede do Bessa.

Nó	Demanda		Cota do terreno (m)	Cota mínima z min (m)	Cota máxima z max (m)
	(L/s)	(m³/h)			
1	420,43	1513,54	-	54,0	54,0
2	0,00	0,00	5,0	30,0	54,0
3	43,44	-156,38	5,0	30,0	54,0
4	40,29	-145,04	4,0	29,0	54,0
5	208,60	-750,96	4,5	29,5	54,0
6	48,61	-175,01	4,5	29,5	54,0
7	80,32	-289,15	4,5	29,5	54,0

Como a rede é relativamente simples, os limites de vazão em cada trecho podem determinados por balanço de massa em cada nó. Esses limites e o comprimento dos trechos são apresentados na tabela 7.16.

Tabela 7.16 – Dados dos trechos da rede do Bessa.

Trecho		Comprimento (m)	Vazão mínima Qmin (m³/h)	Vazão máxima Qmax (m³/h)
Nó montante	Nó jusante			
1	2	2.540,00	1.513,54	1.513,54
2	3	350,00	0,00	1.513,54
2	6	1.020,00	0,00	1.513,54
3	4	1.140,00	-156,38	1.357,16
4	5	1.430,00	-301,42	1.212,12
5	7	1.710,00	-1.052,38	461,16
6	7	1.430,00	-172,01	1.341,53



## 7.2.1 Aplicação do Modelo de Otimização

O problema relaxado, formulado com base nos limites de vazão em cada trecho, possui 161 variáveis e 91 restrições, incluindo os limites simples nas variáveis. O problema exato possui 77 variáveis e 28 restrições. Estabelecendo-se a diferença entre limites globais de 0,005, o modelo atinge o resultado requerido após 101 nós ativos enumerados. A convergência nesta aplicação é ilustrada na figura 7.8 e os resultados são apresentados na tabelas 7.17 e 7.18.

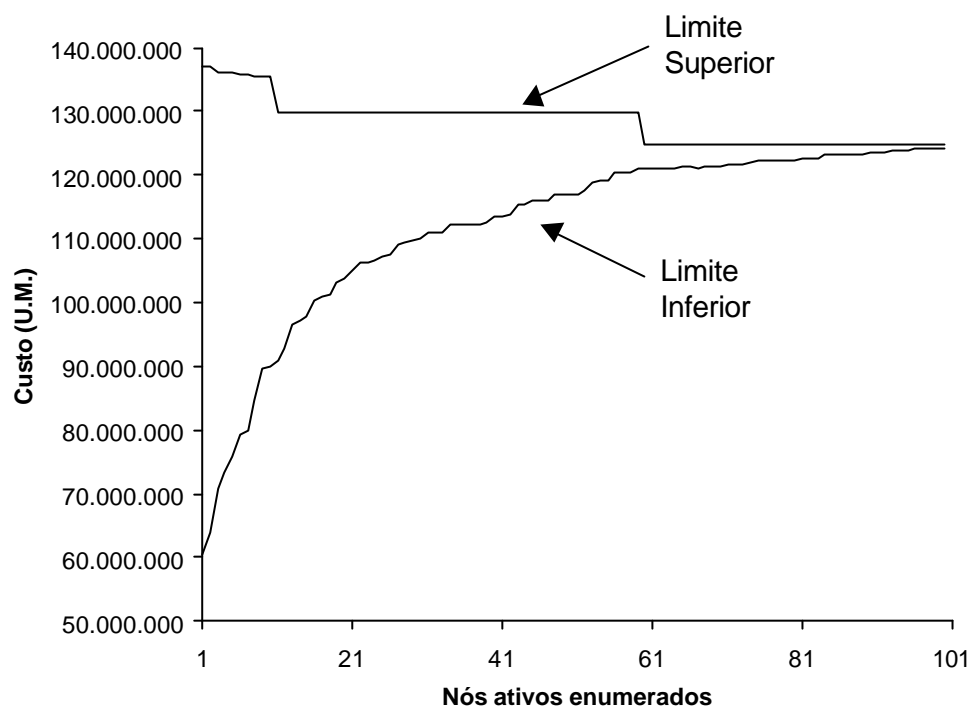


Figura 7.8 – Convergência do modelo de otimização na rede do Bessa.

Tabela 7.17 – Resultados finais da otimização da rede do Bessa – vazões e diâmetros.

Trecho		Vazão (m <sup>3</sup> /h)	D1 (mm)	X1 (m)	D2 (mm)	X2 (m)
Nó montante	Nó jusante					
1	2	1513,54	500	188,32	600	2351,68
2	3	1052,38	500	350,00	-	0,00
2	6	461,16	350	1020,00	-	0,00
3	4	896,00	450	1140,00	-	0,00
4	5	750,96	400	1430,00	-	0,00
5	7	0,00	100	1710,00	-	0,00
6	7	289,15	250	1110,29	300	319,71
<b>Limite Superior (U.M.)</b>		124.324.826				
<b>Limite Inferior (Custo)</b>		124.864.239				
<b>Nós ativos enumerados</b>		101				
<b>GAP</b>		0,00434				

Observa-se que, na rede ótima, apenas os trechos 1-2 e 6-7 possuem dois diâmetros, não sendo recomendada a unificação dos mesmos, já que os comprimentos de cada segmento são significativos. O uso de dois diâmetros em alguns trechos também foi resultado dos outros estudos realizados, à exceção da enumeração exaustiva, em que não há essa possibilidade.

A rede ótima obtida caracteriza-se por uma configuração “pseudo-ramificada”, uma vez que no trecho 5-7 são previstos uma vazão insignificante e o menor diâmetro comercial disponível na tabela 7.14. Esse resultado vai ao encontro das conclusões de diversos estudos que indicam que a rede ótima tende a assumir uma configuração ramificada, em que os anéis são formados pela imposição de diâmetros mínimos.

Como apresentado na tabela 7.18, os outros modelos produzem distribuições de vazão distintas, existindo a tendência de redução de vazão no trecho 5-7. A exceção fica por conta da programação não linear de Formiga (1999), que resultou exatamente na mesma distribuição de vazões gerada pelo modelo proposto, apesar dos diâmetros diferentes.

Tabela 7.18 – Resultados obtidos por outros estudos na rede do Bessa – vazões.

Trecho	Vazões (L/s)			
	WADISO	GRANADOS	PNL	Modelo proposto
1-2	420,4	420,4	420,4	420,4
2-3	263,5	241,9	292,3	292,3
2-6	156,9	178,4	128,1	128,1
3-4	220,1	198,5	248,9	248,9
4-5	179,8	158,2	208,6	208,6
5-7	28,8	50,4	0,0	0,0
6-7	109,1	130,7	80,3	80,3

WADISO = Enumeração exaustiva (Walski *et al.*, 1990);  
 GRANADOS = Método de Granados (Gomes, 1997);  
 PNL = Programação Não Linear (Formiga, 1999).

Como mostra a tabela 7.19, a enumeração exaustiva e o método de GRANADOS produzem redes com maior capacidade em relação à programação não linear e à otimização global. Com relação a esses últimos modelos, as diferenças de diâmetros ocorrem apenas nos trechos 1-2, 2-3 e 6-7.

Tabela 7.19 – Resultados obtidos por outros estudos na rede do Bessa – diâmetros.

Trecho	WADISO		GRANADOS		PNL		Modelo proposto	
	D (mm)	L (m)	D (mm)	L (m)	D (mm)	L (m)	D (mm)	L (m)
1-2	600	2.540	500 600	180 2.360	600	2.540	500 600	188 2352
2-3	400	350	400	350	450 500	331 19	500	350
2-6	400	1.020	400	1.020	350	1.020	350	1.020
3-4	400	1.140	400	1.140	450	1.140	450	1.140
4-5	400	1.430	400	1.430	400	1.430	400	1.430
5-7	300	1.710	250	1.710	100	1.710	100	1.710
6-7	300	1.430	400	1.430	250 300	1.316 114	250 300	1110 320

WADISO = Enumeração exaustiva (Walski *et al.*, 1990);

GRANADOS = Método de Granados (Gomes, 1997);

PNL = Programação Não Linear (Formiga, 1999).

O fato do modelo de programação não linear ter obtido a mesma distribuição de vazões do modelo de otimização global abre a possibilidade do uso combinado dos mesmos. Por um lado, a aplicação do problema exato às distribuições de vazões geradas pela programação não linear pode aprimorar os resultados. Por outro, o uso da programação não linear no lugar do problema exato pode gerar distribuições de vazão mais próximas da ótima, acelerando a velocidade de convergência da otimização global.

A tabela 7.20 apresenta as cargas hidráulicas obtidas pelas diferentes metodologias. Percebe-se que as redes obtidas pela enumeração exaustiva e pelo método de GRANADOS possuem folgas de pressão, enquanto que a programação não linear e a otimização global atingem as cargas mínimas nos nós 5 e 7.

Tabela 7.20 – Resultados finais da rede do Bessa – cargas hidráulicas nos nós.

Nó	Carga hidráulica (m)			
	WADISO	GRANADOS	PNL	Modelo proposto
2	41,6	40,8	41,0	40,2
3	40,5	38,2	38,8	38,8
4	34,3	33,2	34,3	34,3
5	27,5	27,2	25,0	25,0
6	38,6	36,9	36,7	35,8
7	28,5	33,4	25,0	25,0

WADISO = Enumeração exaustiva (Walski *et al.*, 1990);

GRANADOS = Método de Granados (Gomes, 1997);

PNL = Programação Não Linear (Formiga, 1999).

A tabela 7.21 apresenta os custos obtidos por outros modelos de otimização. O custo da rede ótima obtida é 0,44% menor do que o melhor resultado existente, atingido pelo modelo de programação não linear. Diversos testes foram promovidos por Formiga (1999) no intuito

de garantir que os resultados de seu modelo constituem o ótimo global do problema. O modelo proposto mostrou que o custo mínimo global é bastante próximo do obtido por programação não linear, havendo a possibilidade da diferença estar relacionada com problemas numéricos, como arredondamento de valores e níveis de precisão utilizados.

Tabela 7.21 – Resultados obtidos por outros estudos na rede do Bessa – custos.

<b>Modelo</b>	<b>Custo (U.M.)</b>
Enumeração exaustiva – WADISO (Walski <i>et al.</i> 1990)	138.458.323
GRANADOS (Gomes, 1997)	137.562.788
Programação não linear (Formiga, 1999)	124.873.088
Modelo proposto (otimização global)	124.324.826

U.M. = Unidades Monetárias

### 7.3 EXEMPLO Nº 3 – REDE DA CIDADE DE APUCARANA

A terceira aplicação refere-se à expansão da rede de distribuição de água da cidade de Apucarana, Estado do Paraná. O objetivo dessa aplicação é avaliar a performance dos modelos no caso de expansão de redes e comparar resultados com outros estudos.

A rede foi utilizada por Vieira (1980) e Koide (1984) na aplicação de seus modelos de otimização e na comparação com o projeto original elaborado pela empresa SERETE. A rede existente é composta por tubos de ferro fundido ( $Chw = 90$ ) e apenas um reservatório enquanto que na expansão são utilizados tubos de PVC ( $Chw = 140$ ). Os diâmetros disponíveis para projeto e os diâmetros utilizados na rede existente constam da tabela 7.22. Os custos dos diâmetros utilizados apenas na rede existente são nulos, pois não são computados no custo total da rede. As probabilidades de operação satisfatória em função do diâmetro, calculadas pela equação 6.2, também são apresentadas na tabela 7.22.

Tabela 7.22 – Dados dos diâmetros disponíveis da rede de Apucarana.

Diâmetro		Chw	a (equação 7.1)	Custo (U.M./m)	Pop
N.º	(mm)				
1	85	140	$4,80 \cdot 10^{-5}$	116,18	0,999159
2	110	140	$1,37 \cdot 10^{-5}$	191,99	0,999379
3	140	140	$4,22 \cdot 10^{-6}$	369,30	0,999533
4	160	140	$2,20 \cdot 10^{-6}$	478,09	0,999601
5	125	90	$1,66 \cdot 10^{-5}$	0,00	0,999466
6	150	90	$6,84 \cdot 10^{-6}$	0,00	0,999569
7	200	90	$1,68 \cdot 10^{-6}$	0,00	0,999693
8	250	90	$5,68 \cdot 10^{-7}$	0,00	0,999764
9	350	90	$1,10 \cdot 10^{-7}$	0,00	0,999841

Chw = Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams;

U.M. = Unidade monetária;

Pop = Probabilidade de operação satisfatória (equação 6.2)

A cota piezométrica do reservatório é fixada em 888 metros e as cargas hidráulicas nos nós são limitadas entre 15 e 50 metros. O nó 1 é ligado diretamente ao reservatório e é caracterizado como ponto de injeção da rede, mantendo constante a mesma cota piezométrica do reservatório. A rede existente é composta por 1 anel, constituído pelos nós 1, 2, 3, 4 e 5, e vários trechos ramificados, totalizando 12 trechos e 12 nós. Na nova configuração, a rede passa a ter 9 anéis, 33 trechos e 25 nós, conforme a figura 7.9. Os dados dos nós são apresentadas na tabela 7.23 e os dados dos trechos na tabela 7.24.

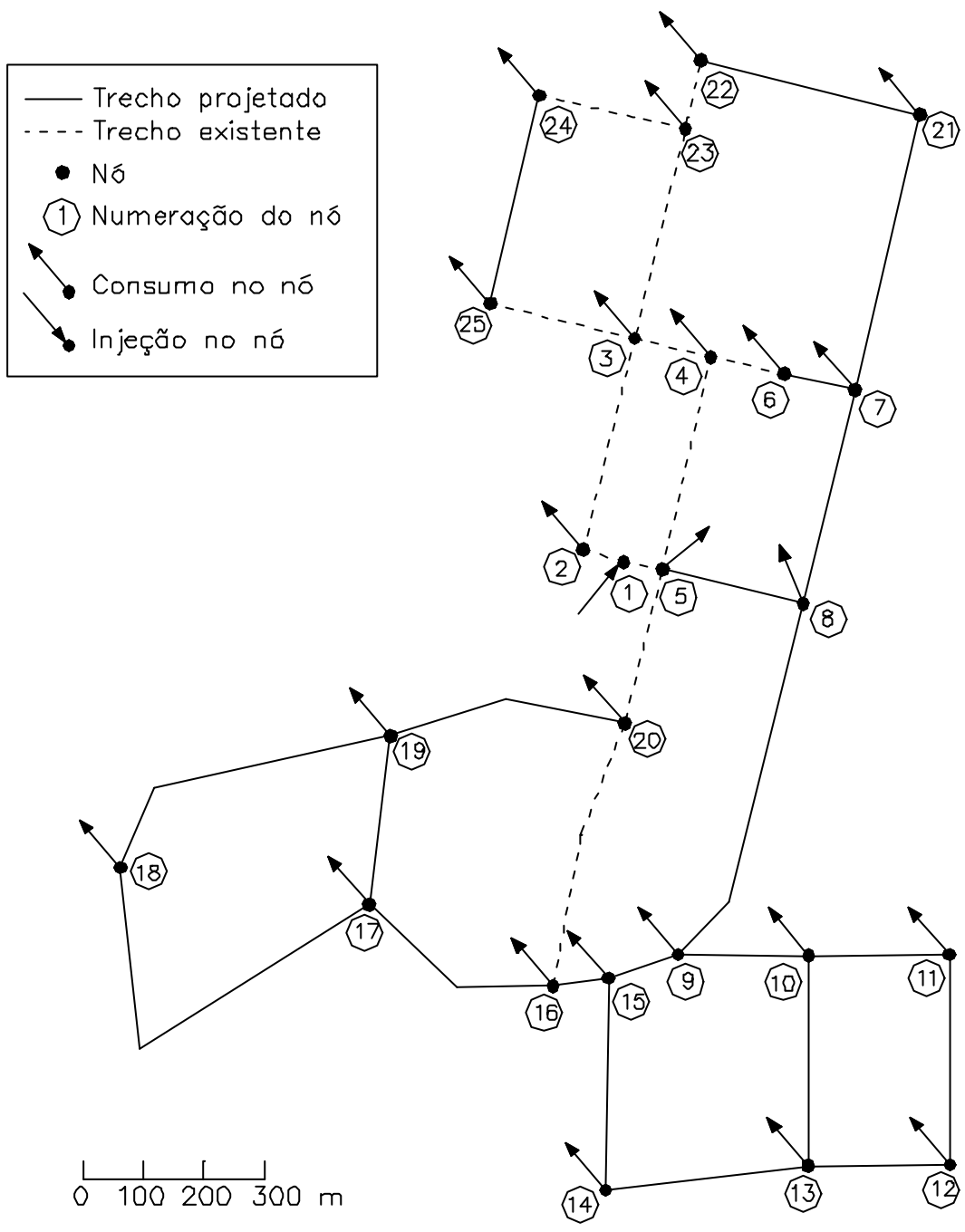


Figura 7.9 – Configuração da rede de Apucarana (exemplo n.º 3).

Tabela 7.23 – Dados dos nós da rede de Apucarana.

Nó	Demanda		Cota do terreno (m)	z min (m)	z max (m)
	(L/s)	(m <sup>3</sup> /h)			
1	140,0	504,0	864,5	888,0	888,0
2	-3,0	-10,8	860,0	875,0	888,0
3	-8,0	-28,8	859,0	874,0	888,0
4	0,0	0,0	862,9	877,9	888,0
5	0,0	0,0	864,1	879,1	888,0
6	0,0	0,0	862,2	877,2	888,0
7	-15,0	-54,0	860,3	875,3	888,0
8	-7,0	-25,2	856,0	871,0	888,0
9	-4,0	-14,4	860,5	875,5	888,0
10	-5,0	-18,0	859,0	874,0	888,0
11	-3,0	-10,8	852,0	867,0	888,0
12	-3,0	-10,8	848,0	863,0	888,0
13	-6,0	-21,6	849,0	864,0	888,0
14	-3,0	-10,8	838,0	853,0	888,0
15	0,0	0,0	861,0	876,0	888,0
16	-6,0	-21,6	860,8	875,8	888,0
17	-6,0	-21,6	848,5	863,5	888,0
18	-10,0	-36,0	855,8	870,8	888,0
19	-8,0	-28,8	861,5	876,5	888,0
20	-5,0	-18,0	859,5	874,5	888,0
21	-14,0	-50,4	852,0	867,0	888,0
22	0,0	0,0	852,0	867,0	888,0
23	-9,0	-32,4	855,0	870,0	888,0
24	-14,0	-50,4	851,0	866,0	888,0
25	-11,0	-39,6	854,6	869,6	888,0

z min = Cota piezométrica mínima;  
z max = Cota piezométrica máxima.

Os limites de vazão em cada trecho são determinados via programação não linear, conforme o procedimento apresentado em 5.4. Esses limites e demais características dos trechos são apresentados na tabela 7.24. Como existem trechos com diâmetros conhecidos e configuração anelar na rede existente, a aplicação é conduzida utilizando-se o modelo de otimização global adaptado para a expansão de redes, conforme a seção 5.2. O modelo de confiabilidade é aplicado à rede de custo mínimo resultante do modelo de otimização, mantendo-se fixos os trechos da rede existente.

Tabela 7.24 – Dados dos trechos da rede de Apucarana.

Trecho		Comprimento (m)	Qmin (m <sup>3</sup> /h)	Qmax (m <sup>3</sup> /h)	Diâmetros disponíveis (mm)
Nó montante	Nó jusante				
1	2	70,0	137,2	193,3	250
1	5	65,0	310,7	366,8	350
2	3	360,0	126,4	182,5	250
3	4	130,0	-53,6	1,8	200
3	23	358,0	85,8	157,9	250
3	25	246,0	46,0	50,9	125
4	5	360,0	-106,2	-64,6	200
4	6	125,0	15,8	105,1	150
5	8	240,0	20,0	129,4	85 ; 110 ; 140 ; 160
5	20	263,0	156,8	258,9	350
6	7	120,0	15,8	105,1	85 ; 110 ; 140 ; 160
7	8	364,0	-65,0	33,1	85 ; 110 ; 140 ; 160
7	21	468,0	-34,0	41,1	85 ; 110 ; 140 ; 160
8	9	509,0	-46,5	55,6	85 ; 110 ; 140 ; 160
9	15	122,0	-113,5	19,1	85 ; 110 ; 140 ; 160
9	10	216,0	-7,0	60,8	85 ; 110 ; 140 ; 160
10	11	233,0	3,8	33,4	85 ; 110 ; 140 ; 160
10	13	348,0	-36,2	33,2	85 ; 110 ; 140 ; 160
11	12	348,0	-7,0	22,6	85 ; 110 ; 140 ; 160
12	13	235,0	-17,8	11,8	85 ; 110 ; 140 ; 160
13	14	338,0	-68,2	-0,4	85 ; 110 ; 140 ; 160
14	15	351,0	-79,0	-11,2	85 ; 110 ; 140 ; 160
15	16	93,0	-132,9	-30,8	85 ; 110 ; 140 ; 160
16	17	358,0	13,8	71,2	85 ; 110 ; 140 ; 160
16	20	454,0	-223,0	-67,0	350
17	18	752,0	4,9	35,7	85 ; 110 ; 140 ; 160
17	19	282,0	-34,8	41,8	85 ; 110 ; 140 ; 160
18	19	543,0	-31,1	-0,3	85 ; 110 ; 140 ; 160
19	20	402,0	-72,6	-15,2	85 ; 110 ; 140 ; 160
21	22	374,0	-84,4	-10,3	85 ; 110 ; 140 ; 160
22	23	116,0	-84,4	-10,3	250
23	24	248,0	39,1	44,0	125
24	25	354,0	-11,3	-6,4	85 ; 110 ; 140 ; 160

Chw = Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams;

Qmin = Vazão mínima possível no trecho;

Qmax = Vazão máxima possível no trecho.

### 7.3.1 Aplicação do Modelo de Otimização

A aplicação do modelo de otimização tem início com a montagem do problema relaxado com base nos limites de vazão da tabela 7.23. Esse problema possui 168 variáveis referentes aos subtrechos de diâmetro desconhecido, 24 referentes aos subtrechos de diâmetro conhecido, 25 referentes às cargas hidráulicas dos nós, 33 referentes às vazões dos trechos e 33 referentes às variáveis  $q$ , totalizando 283 variáveis. O número máximo de restrições chega a 405, incluindo 149 referentes aos limites simples das variáveis, podendo ser menor conforme os enquadramentos nos três casos das aproximações lineares.



A função objetivo corresponde à soma dos custos de cada trecho e é formulada de maneira similar à equação 7.2. As diferenças ficam por conta dos trechos de diâmetros conhecidos, que são formados por apenas um subtrecho e possuem custo unitário nulo.

As equações de conservação de energia são formuladas da mesma forma que em 7.3, com a diferença dos trechos de diâmetro conhecido. Do mesmo modo, as restrições relativas ao comprimento dos trechos e à relação entre  $Q$  e  $q$  (7.5 e 7.6) também sofrem modificações. Quanto às aproximações lineares, no caso dos trechos de diâmetro conhecido, as inequações são substituídas por igualdades, estimando-se valores iniciais para as vazões, conforme o procedimento apresentado na seção 5.4. As outras restrições como conservação de massa nos nós, cargas hidráulicas limites e vazões limites são formuladas de forma idêntica ao problema anterior.

O problema relaxado é resolvido de modo a se encontrar valores iniciais para as vazões nos trechos. De posse desses valores, o processo iterativo tem início para determinação de uma distribuição de vazões que satisfaça as restrições de conservação de energia nos trechos. Essa distribuição de vazões é utilizada para a construção do problema exato.

O problema exato é formulado de forma semelhante ao problema anterior, exceto no caso de trechos de diâmetros conhecidos cujos comprimentos dos subtrechos também são conhecidos. A resolução desse problema exato resulta no primeiro limite superior para o problema.

O processo *Branch and Bound* segue da mesma forma que no problema anterior, atingindo a discrepância pré-estabelecida entre limites globais inferior e superior após 616 nós ativos enumerados. Esse número é razoavelmente pequeno, tendo em vista o porte da rede, mas não contribuiu para a redução do tempo de processamento, já que o processo iterativo para determinação de vazões adequadas é custoso computacionalmente. A convergência nesta aplicação é ilustrada na figura 7.10. O resultado encontrado consta das tabelas 7.25 e 7.26.

Conforme a tabela 7.25, a rede ótima possui 8 trechos compostos por 2 diâmetros. No entanto, em 7 deles o comprimento de um dos segmentos é relativamente pequeno, favorecendo a unificação de diâmetros. Aos trechos existentes, foram reservadas vazões mais altas enquanto que aos trechos 8-9, 11-12, 12-13, 17-19 e 24-25 foram associadas vazões reduzidas e diâmetros mínimos.

Tabela 7.25 – Resultados finais da rede de Apucarana – vazões e diâmetros.

Trecho		Vazão (m³/h)	D1 (cm)	X1 (m)	D2 (cm)	X2 (m)
Nó montante	Nó jusante					
1	2	165,39	25,0	70,00	-	-
1	5	338,61	35,0	65,00	-	-
2	3	154,59	25,0	360,00	-	-
3	4	-30,89	20,0	130,00	-	-
3	23	110,05	25,0	358,00	-	-
3	25	46,64	12,5	246,00	-	-
4	5	-86,72	20,0	360,00	-	-
4	6	55,83	15,0	125,00	-	-
5	8	38,10	8,5	240,00	-	-
5	20	213,78	35,0	263,00	-	-
6	7	55,83	8,5	93,43	11,0	26,57
7	8	-14,28	8,5	364,00	-	-
7	21	16,11	8,5	468,00	-	-
8	9	-1,38	8,5	509,00	-	-
9	10	46,00	8,5	9,78	11,0	206,22
9	15	-61,78	8,5	5,08	11,0	116,92
10	11	15,58	8,5	228,16	11,0	4,84
10	13	12,41	8,5	348,00	-	-
11	12	4,78	8,5	348,00	-	-
12	13	-6,02	8,5	235,00	-	-
13	14	-15,20	8,5	338,00	-	-
14	15	-26,00	8,5	351,00	-	-
15	16	-87,78	11,0	86,79	14,0	6,21
16	17	30,51	8,5	358,00	-	-
16	20	-139,89	35,0	454,00	-	-
17	18	16,09	8,5	737,97	11,0	14,03
17	19	-7,18	8,5	282,00	-	-
18	19	-19,91	8,5	543,00	-	-
19	20	-55,89	8,5	2,24	11,0	399,76
21	22	-34,29	8,5	363,99	11,0	10,01
22	23	-34,29	25,0	116,00	-	-
23	24	43,36	35,0	248,00	-	-
24	25	-7,04	8,5	354,00	-	-
<b>Limite Superior (U.M.)</b>		886.227,46				
<b>Limite Inferior (U.M.)</b>		882.253,95				
<b>Nós ativos enumerados</b>		616				
<b>GAP</b>		0,00448				

Verifica-se que a existência de trechos com diâmetros conhecidos traz dificuldades numéricas ao modelo de otimização, particularmente quando esses trechos formam anéis. Isso porque as distribuições de vazão geradas pelo problema relaxado, geralmente, não implicam em soluções possíveis no problema exato, quando diâmetros e perdas de carga são fixadas em alguns trechos. Na existência de anéis com diâmetros fixos, torna-se obrigatório o uso da adaptação descrita na seção 5.2, uma vez as vazões geradas no problema relaxado não atendem necessariamente aos requisitos de conservação de energia e devem ser fixadas no problema exato.

Tabela 7.26 – Resultados finais da rede de Apucarana – cargas hidráulicas.

Nó	Carga hidráulica (m)	Cota Piezométrica (m)	Nó	Carga hidráulica (m)	Cota Piezométrica (m)
1	23,50	888,00	14	36,73	874,73
2	27,49	887,49	15	20,76	881,76
3	26,17	885,17	16	25,78	886,58
4	22,40	885,30	17	28,44	876,94
5	23,55	887,65	18	15,03	870,83
6	21,63	883,83	19	15,96	877,46
7	15,20	875,50	20	27,55	887,05
8	21,90	877,90	21	19,64	871,64
9	17,45	877,95	22	31,90	883,90
10	15,00	874,00	23	28,94	883,94
11	20,22	872,22	24	28,50	879,50
12	23,92	871,92	25	25,53	880,13
13	23,23	872,23			

Observa-se que os trechos de menor vazão são os mesmos encontrados por Koide (1984), evidenciando uma certa proximidade de resultados. Como reportado por Vieira (1980), o nó crítico da rede é o 10, por possuir carga hidráulica mínima (tabela 7.26). O modelo proposto também resultou em baixa carga hidráulica no nó 18, de forma semelhante ao resultado obtido por Koide (1984).

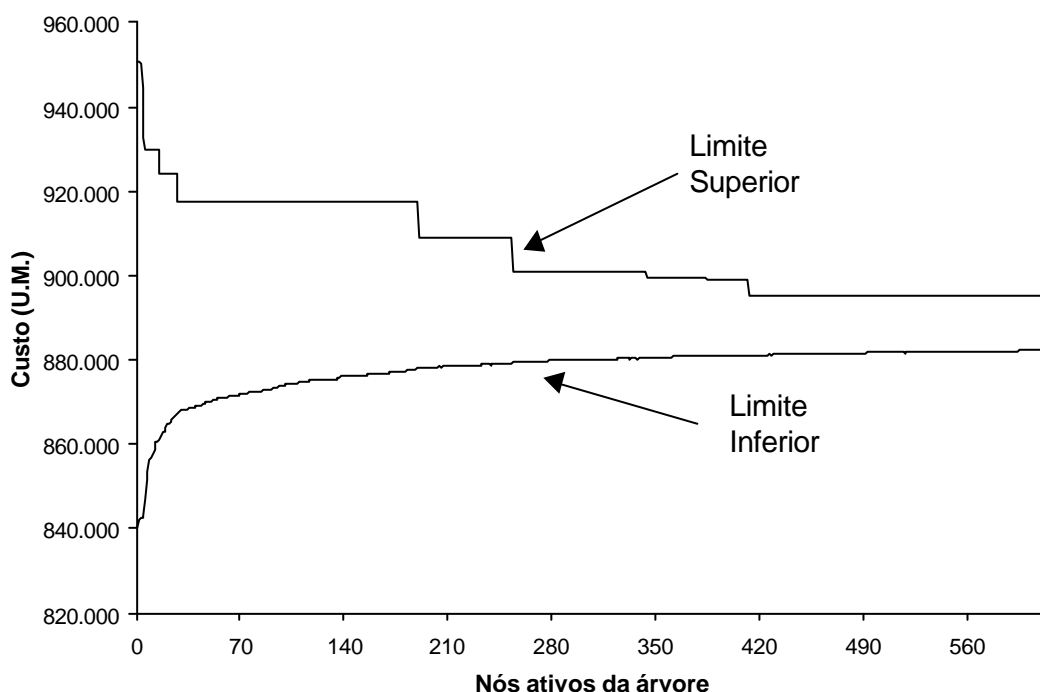


Figura 7.10 – Convergência do modelo de otimização na rede de Apucarana.

Diferentemente dos exemplos anteriores, um bom limite superior para a função objetivo só foi atingido após dezenas de enumerações, impedindo a eliminação de nós do processo de busca e retardando sua convergência. Isso pode ser creditado ao maior número de trechos da rede, o que implica em maior relaxação do problema original, já que as aproximações lineares são efetuadas por trecho.

Apesar dos limites de vazão determinados conforme a seção 5.4 não garantirem que o resultado é o ótimo global, o custo obtido é inferior ao menor existente na literatura, atendendo todas as restrições. A ampliação dos limites de vazão pode conduzir a resultados melhores ou confirmar o obtido como ótimo global, sob o custo de acréscimo na quantidade de enumerações e tempo de processamento.

Em suas aplicações, Vieira (1980) utilizou o modelo de otimização de Alperovitz e Shamir (1977) e Koide (1984) utilizou um modelo de otimização heurística a partir do custo de energia. A empresa SERETE fez uso do método convencional de cálculo de redes, verificando pressões e vazões pelo modelo Hardy Cross. A comparação com resultados de outros estudos (tabela 7.27) mostra que o modelo proposto foi capaz de reduzir em 46% o custo de implantação em relação ao projeto original desenvolvido pela SERETE. Em relação ao modelo de Alperovits e Shamir (1977), implementado por Vieira (1980), a redução foi de 21% e em relação a Koide (1984) a redução foi de 4%. Cabe ressaltar que essa última solução infringe a restrição de carga mínima no nó 18, ainda que por um valor insignificante.

.A unificação dos diâmetros dos trechos compostos por dois segmentos, feita indiscriminadamente pelo maior diâmetro do trecho, resulta em significativo acréscimo de custo em relação à rede ótima. Isso porque os segmentos de maior comprimento possuem os menores diâmetros, que são substituídos por diâmetros maiores no processo de unificação. A unificação pelo maior comprimento reduziu a capacidade hidráulica da rede mas resultou em pequeno acréscimo de custo.

Tabela 7.27 – Resultados obtidos por outros estudos na rede de Apucarana – custos.

<b>Estudo</b>	<b>Custo (U.M.)</b>
Projeto original – SERETE	1.638.336,00
Modelo de Alperovits e Shamir (1977) – Vieira (1980)	1.122.552,00
Enumeração implícita – Koide (1984)	926.000,00
Modelo proposto (otimização global)	886.227,46
Modelo proposto (unificação pelos maiores diâmetros)	1.010.831,55
Modelo proposto (unificação pelos maiores comprimentos)	891.315,93

### 7.3.2 Aplicação do Modelo de Análise de Confiabilidade

A quantificação da confiabilidade é feita da mesma forma que no primeiro exemplo, determinando-se as probabilidades de ocorrência das configurações de falha e associando-as aos índices de performance hidráulica. Simulando-se apenas as situações em que um único trecho fica fora de operação, são totalizadas 34 configurações de falha, incluindo a configuração em que todos os trechos operam satisfatoriamente. Foram adotados como parâmetros Hmin e Hce os valores 1m e 15m, respectivamente, considerando-se que as cargas hidráulicas acima da carga mínima de projeto (15m) são aceitáveis e os nós que atingirem esse limite têm a mesma performance satisfatória.

As probabilidades de operação satisfatória dos subtrechos (Pop) e trechos (P), operação simultânea de todos os trechos (P0) e falha de trechos associadas ao funcionamento dos demais (PF) são determinadas conforme as equações 6.2, 6.4, 6.4a e 6.4b, respectivamente. As probabilidades P e PF são apresentadas na tabela 7.28.

Tabela 7.28 – Probabilidades de falha e índices de performance da rede de Apucarana.

Trecho F.O.		P	PF	PHG	Trecho F.O.		P	PF	PHG
1	2	0,999764	0,000234	0,875236	10	13	0,999159	0,000819	1,000000
1	5	0,999841	0,000234	0,616291	11	12	0,999159	0,000819	1,000000
2	3	0,999764	0,000302	0,904868	12	13	0,999159	0,000819	0,999697
3	4	0,999693	0,000302	1,000000	13	14	0,999159	0,001424	0,994098
3	23	0,999764	0,000156	0,799460	14	15	0,999159	0,000819	0,975063
3	25	0,999466	0,000419	0,956250	15	16	0,998912	0,000819	0,844689
4	5	0,999693	0,001424	0,990574	16	17	0,999159	0,001424	0,933605
4	6	0,999569	0,000819	0,896706	16	20	0,999841	0,000819	0,737742
5	8	0,999159	0,000819	0,966165	17	18	0,998539	0,001424	0,965316
5	20	0,999841	0,000156	0,594670	17	19	0,999159	0,000819	0,998327
6	7	0,998539	0,000156	0,896732	18	19	0,999159	0,001424	0,958457
7	8	0,999159	0,001063	0,985001	19	20	0,998539	0,000234	0,897023
7	21	0,999159	0,001424	0,968982	21	22	0,998539	0,000234	0,917929
8	9	0,999159	0,000819	1,000000	22	23	0,999764	0,000517	0,917941
9	10	0,998539	0,001424	0,917841	23	24	0,999466	0,000819	0,943598
9	15	0,998539	0,000819	0,915717	24	25	0,998539	0,000517	0,999993
10	11	0,998539	0,000819	0,997761					

Trecho F.O. = Trecho fora de operação (nó de montante e nó de jusante);

P = Probabilidade de operação do trecho;

PF = Probabilidade de falha do trecho associada à operação dos demais;

PHG = Performance hidráulica global na configuração de falha;

De fato, os trechos existentes possuem menor probabilidade de operação do que os projetados, devido ao maior tempo de operação. Entretanto, devido à ausência de dados estatísticos sobre o aumento da frequência de falha dos trechos com o tempo, esse

parâmetro foi calculado como nos demais trechos. Com isso, as probabilidades de operação e, por consequência, o índice de confiabilidade são superestimados.

A aplicação do modelo hidráulico a cada configuração de falha gera distribuições de vazão e pressões na rede que são utilizadas na determinação dos índices de performance hidráulica nodais (*PHN*). A média desses índices, ponderada pelas demandas nodais, resulta nos índices de performance globais (*PHG*) para cada configuração de performance, apresentados na tabela 7.28.

Observa-se, na tabela 7.28, que alguns trechos, quando fora de operação, não alteram a performance da rede, como o 3-4, 8-9, 10-13 e 11-12. A razão desse fato pode estar relacionada como a configuração anelar da rede, que permite a redistribuição de vazões quando da falha de algum componente. Ao contrário, alguns trechos, quando falham, produzem grandes perdas de performance, como é o caso dos trechos 1-5, 3-23, 5-20 e 16-20. Portanto, ainda que a configuração da rede possua a redundância desejável, a existência de caminhos preferenciais de fluxo e trechos de diâmetro mínimo pode interromper o suprimento de alguns nós, quando trechos principais são bloqueados.

A análise da alteração de diâmetros é procedida apenas nos trechos da expansão da rede, já que a parte existente não pode ser alterada. A aplicação do algoritmo de alteração de diâmetros a partir da rede ótima permite a avaliação do efeito do aumento de capacidade hidráulica sobre a confiabilidade e o custo. De forma resumida, as alterações efetuadas a cada iteração constam da tabela 7.29.

Ao contrário do primeiro exemplo, o algoritmo chegou ao fim quando o índice de confiabilidade (*ICF*) passou a apresentar variações insignificantes, existindo, ainda, trechos da rede a serem modificados. Essa indicação de um nível máximo de confiabilidade está associada aos parâmetros *Hmin* e *Hace* escolhidos, que sempre associam  $PHN=1$  nos nós que atendem ao requisito de carga hidráulica mínima.

Ainda em razão dos parâmetros *Hmin* e *Hace*, a variação da confiabilidade não é significativa, em termos absolutos, durante o processo de alteração de diâmetros. Porém, a expressiva variação do custo a cada alteração, revela a sensibilidade desse índice.

Observa-se que as 6 primeiras alteração são orientadas para trechos com dois diâmetros. Esses trechos possuem menor probabilidade de operação, pois esse parâmetro é dado pelo produto dos valores dos dois segmentos. Nesse exemplo particular, alguns trechos de diâmetro duplo possuem segmentos de pequeno comprimento, o que reduz o custo da unificação. Esses fatos acabam por favorecer escolha desses trechos no processo.

Tabela 7.29 – Resumo do processo de alteração de diâmetros na rede de Apucarana.

Iteração	Trecho alterado	Confiabilidade ICF	Custo – C (U.M.)	D ICF (%)	D C (%)	D ICF/ D C (%)
0	-	0,999161	886.227	-	-	-
1	<b>19 20</b>	0,999176	886.397	$1,501.10^{-3}$	$1,918.10^{-2}$	$7,826.10^0$
2	<b>9 10</b>	0,999221	887.138	$6,005.10^{-3}$	$1,028.10^{-1}$	$5,842.10^0$
3	<b>9 15</b>	0,999244	887.523	$8,307.10^{-3}$	$1,462.10^{-1}$	$5,680.10^0$
4	<b>15 16</b>	0,999307	902.912	$1,461.10^{-2}$	$1,883.10^{+1}$	$7,761.10^{-1}$
5	<b>21 22</b>	0,999395	930.506	$2,342.10^{-2}$	$4,996.10^{+1}$	$4,687.10^{-1}$
6	<b>6 7</b>	0,999415	937.589	$2,542.10^{-2}$	$5,796.10^{+1}$	$4,386.10^{-1}$
7	24 25	0,999498	964.426	$3,373.10^{-2}$	$8,824.10^{+1}$	$3,822.10^{-1}$
8	17 19	0,999557	985.804	$3,963.10^{-2}$	$1,124.10^{+1}$	$3,527.10^{-1}$
9	8 9	0,999620	1.024.392	$4,594.10^{-2}$	$1,559.10^{+1}$	$2,947.10^{-1}$
10	<b>17 18</b>	0,999708	1.080.337	$5,475.10^{-2}$	$2,190.10^{+1}$	$2,499.10^{-1}$
11	5 8	0,999729	1.098.532	$5,685.10^{-2}$	$2,396.10^{+1}$	$2,373.10^{-1}$
12	7 21	0,999768	1.134.011	$6,075.10^{-2}$	$2,796.10^{+1}$	$2,173.10^{-1}$
13	14 15	0,999780	1.160.620	$6,195.10^{-2}$	$3,096.10^{+1}$	$2,001.10^{-1}$
14	13 14	0,999790	1.186.244	$6,295.10^{-2}$	$3,385.10^{+1}$	$1,860.10^{-1}$
15	10 13	0,999801	1.212.626	$6,405.10^{-2}$	$3,683.10^{+1}$	$1,739.10^{-1}$
16	6 7	0,999807	1.233.903	$6,465.10^{-2}$	$3,923.10^{+1}$	$1,648.10^{-1}$
17	15 16	0,999810	1.244.020	$6,495.10^{-2}$	$4,037.10^{+1}$	$1,609.10^{-1}$
18	19 20	0,999828	1.315.299	$6,676.10^{-2}$	$4,842.10^{+1}$	$1,379.10^{-1}$
19	16 17	0,999855	1.342.439	$6,946.10^{-2}$	$5,148.10^{+1}$	$1,349.10^{-1}$
20	18 19	0,999885	1.383.604	$7,246.10^{-2}$	$5,612.10^{+1}$	$1,291.10^{-1}$
21	7 8	0,999887	1.411.199	$7,266.10^{-2}$	$5,924.10^{+1}$	$1,227.10^{-1}$
22	9 10	0,999904	1.449.498	$7,436.10^{-2}$	$6,356.10^{+1}$	$1,170.10^{-1}$
23	21 22	0,999905	1.515.811	$7,446.10^{-2}$	$7,104.10^{+1}$	$1,048.10^{-1}$

Trechos em negrito são compostos por diâmetros duplos;  
 $\Delta$  ICF = Variação da confiabilidade em relação à rede ótima;  
 $\Delta$  C = Variação do custo em relação à rede ótima.

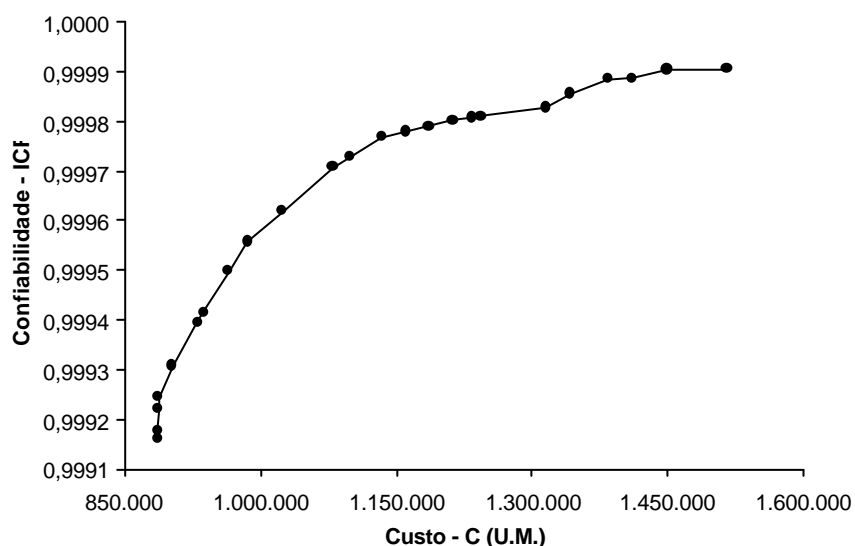


Figura 7.11 – Variação da confiabilidade em relação ao custo na rede de Apucarana.

Ainda assim, alguns trechos não foram unificados (10-11 e 17-18), uma vez que o segmento de maior comprimento é, também, o de menor diâmetro, implicando em alto custo em detrimento do ganho de confiabilidade.

Como mostram as figuras 7.11 e 7.12, da mesma forma que no primeiro exemplo, a confiabilidade cresce rapidamente com o aumento da capacidade hidráulica (incremento de diâmetros), nas primeiras alterações. Após um determinado ponto, o índice *ICF* tende a se estabilizar em um nível máximo, a partir do qual o aumento de diâmetros não provoca melhora da confiabilidade. Já o custo apresenta um aumento singelo das primeiras alterações, assumindo uma tendência de crescimento linear ao longo do processo.

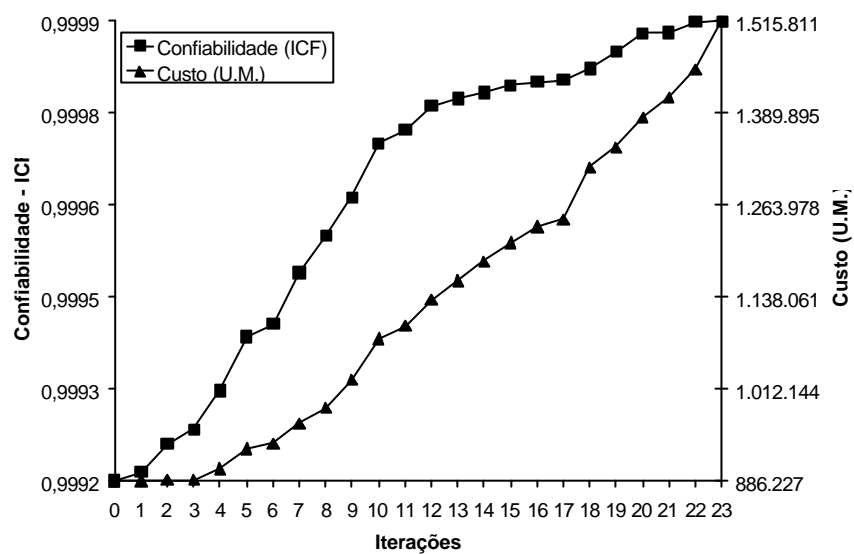


Figura 7.12 – Evolução da confiabilidade e do custo a cada alteração na rede de Apucarana.

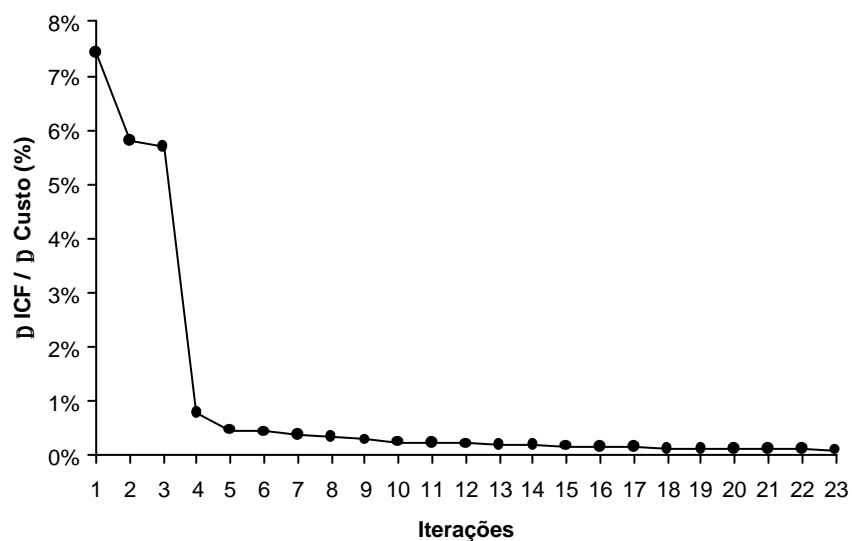


Figura 7.13 – Variação da relação  $\Delta ICF / \Delta C$  na rede de Apucarana.



Em razão das variações da confiabilidade e do custo, a relação  $\Delta/CF/\Delta C$  varia verticalmente nas primeiras alterações (figura 7.13). A variação dessa relação torna claro quais alterações são recomendadas na rede ótima, considerando-se aspectos de confiabilidade e custo.

O processo de alteração de diâmetros mostrou que a unificação dos diâmetros de alguns trechos não é vantajosa em termos da relação confiabilidade/custo, sugerindo que o incremento de diâmetro em outros trechos levaria em melhores resultados. De acordo com a figura 7.13, os trechos que deveriam ter seus diâmetros unificados são 6-7, 19-20, 9-15 e 9-10. Nesses trechos, o segmento de maior diâmetro também é o de maior comprimento, com exceção do primeiro. Portanto, como a unificação pelo maior diâmetro acarreta maiores custos nos trechos em que o segmento de maior diâmetro possui o menor comprimento, a unificação é recomendada apenas para os trechos citados.

Contudo, mantendo-se a unificação pelo maior diâmetro no trecho 6-7 e procedendo-se a unificação dos outros trechos pelo maior comprimento, obtém-se uma rede que ainda atende aos requisitos de pressão e com um custo próximo ao ótimo global, como mostra a tabela 7.27. Nesse caso, a unificação resulta no menor custo possível, reduzindo a capacidade hidráulica e tornando possíveis pressões insatisfatórias. Casualmente, isso não ocorre devido às quatro primeiras unificações que aumentam a capacidade hidráulica.

#### 7.4 EXEMPLO Nº 4 – REDE PARANOÁ

A quarta aplicação é efetuada na rede de distribuição de água da cidade do Paranoá, Distrito Federal, projetada pela ETEP Engenharia e construída pela Companhia de Água e Esgoto do Distrito Federal – CAESB. Como no exemplo anterior, trata-se de um projeto de expansão em que alguns trechos de uma rede ramificada antiga são aproveitados, como mostra a figura 7.14. As diferenças estão na ausência de anéis na rede existente e na possibilidade de projeto de trechos em paralelo a trechos existentes. O objetivo dessa aplicação é a avaliação da performance dos modelos em redes mais extensas e avaliação das relações entre capacidade hidráulica, custo, confiabilidade e demanda.

Na nova configuração, a rede possui 16 anéis, 54 trechos e 39 nós, sendo que 10 trechos possuem diâmetros conhecidos e fixos. Os limites de carga hidráulica mínima e máxima nos nós são 10 e 50 metros, respectivamente, de acordo com as normas brasileiras. A cota piezométrica do reservatório único (nó 19) é fixada em 1167,45 metros.

Como não há informações sobre custos no projeto original, são utilizados dados levantados pela CAGEPA referentes ao ano de 1982 e apresentados por Formiga (1999), já que suas aplicações também foram realizadas em redes brasileiras. Para cada trecho, são disponíveis 7 diâmetros comerciais, cujas características são apresentadas na tabela 7.30. Nos trechos em projeto (expansão) são utilizados tubos de PVC com coeficiente de rugosidade  $Chw=130$  e nos trechos existentes são utilizados tubos com coeficiente de rugosidade  $Chw=90$ , simulando a maior perda de carga de tubulações antigas. Os dados dos nós constam da tabela 7.31 e os dos trechos constam da tabela 7.32.

Tabela 7.30 – Dados dos diâmetros disponíveis da rede Paranoá.

Diâmetro		Chw	a (equação 7.1)	Custo (U.M./m)	Pop
N.º	(mm)				
1	100	130	$2,04 \cdot 10^{-5}$	1.629,00	0,99931
2	150	130	$2,83 \cdot 10^{-6}$	4.054,00	0,99957
3	200	130	$6,97 \cdot 10^{-7}$	5.769,00	0,99969
4	250	130	$2,35 \cdot 10^{-7}$	7.718,00	0,99976
5	300	130	$9,67 \cdot 10^{-8}$	9.237,00	0,99981
6	400	130	$2,38 \cdot 10^{-8}$	12.397,00	0,99986
7	500	130	$8,04 \cdot 10^{-9}$	17.696,00	0,99990

Chw = Coeficiente de rugosidade de Hazen-Williams;

U.M. = Unidade monetária;

Pop = Probabilidade de operação satisfatória (equação 6.2).

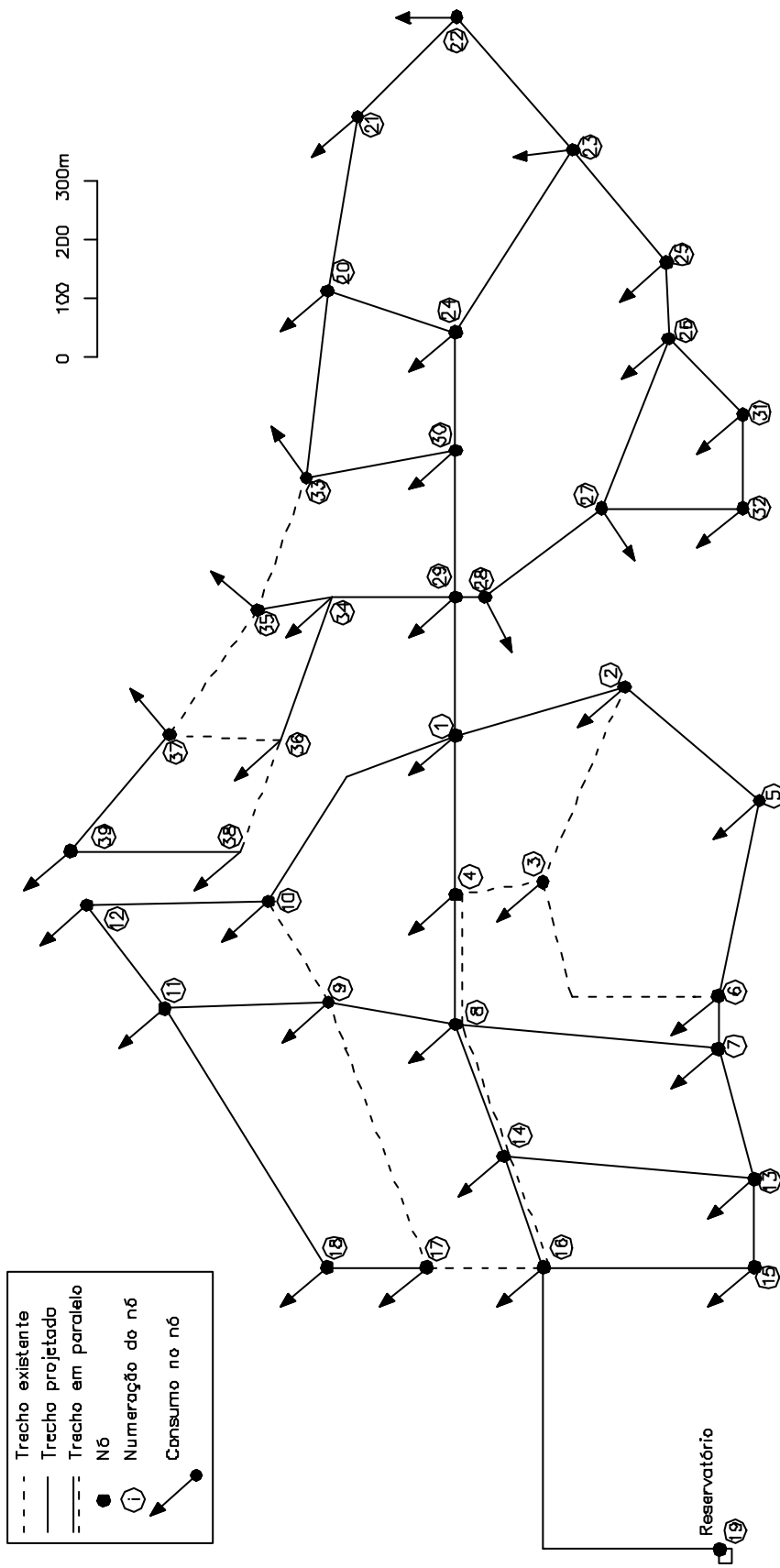


Figura 7.14 – Configuração da rede do Paranoá (exemplo n.º 4).

Tabela 7.31 – Dados dos nós da rede Paranoá.

Nó	Demanda		Cota do terreno (m)	z min (m)	z max (m)
	(L/s)	(m <sup>3</sup> /h)			
1	-7,27	-26,17	1.134,37	1.144,37	1.167,45
2	-7,22	-25,99	1.133,86	1.143,86	1.167,45
3	-7,43	-26,75	1.140,33	1.150,33	1.167,45
4	-5,13	-18,47	1.139,28	1.149,28	1.167,45
5	-2,89	-10,40	1.129,80	1.139,80	1.167,45
6	-3,00	-10,80	1.138,33	1.148,33	1.167,45
7	-5,03	-18,11	1.140,86	1.150,86	1.167,45
8	-7,74	-27,86	1.143,50	1.153,50	1.167,45
9	-8,13	-29,27	1.138,89	1.148,89	1.167,45
10	-5,72	-20,59	1.135,60	1.145,60	1.167,45
11	-4,49	-16,16	1.131,21	1.141,21	1.167,45
12	-3,27	-11,77	1.127,88	1.137,88	1.167,45
13	-5,29	-19,04	1.147,19	1.157,19	1.167,45
14	-8,35	-30,06	1.148,13	1.158,13	1.167,45
15	-6,47	-23,29	1.150,40	1.160,40	1.167,45
16	-7,79	-28,04	1.150,78	1.160,78	1.167,45
17	-7,38	-26,57	1.147,27	1.157,27	1.167,45
18	-5,09	-18,32	1.143,37	1.153,37	1.167,45
19	215,48	775,73	1.167,45	1.167,45	1.167,45
20	-5,05	-18,18	1.105,08	1.115,08	1.155,08
21	-6,85	-24,66	1.098,24	1.108,24	1.148,24
22	-16,71	-60,16	1.100,87	1.110,87	1.150,87
23	-6,77	-24,37	1.109,07	1.119,07	1.159,07
24	-6,77	-24,37	1.112,76	1.122,76	1.162,76
25	-7,79	-28,04	1.108,21	1.118,21	1.158,21
26	-5,42	-19,51	1.117,59	1.127,59	1.167,45
27	-4,60	-16,56	1.127,09	1.137,09	1.167,45
28	-2,58	-9,29	1.130,32	1.140,32	1.167,45
29	-3,48	-12,53	1.128,62	1.138,62	1.167,45
30	-6,51	-23,44	1.121,73	1.131,73	1.167,45
31	-4,78	-17,21	1.115,31	1.125,31	1.165,31
32	-5,48	-19,73	1.125,14	1.135,14	1.167,45
33	-4,35	-15,66	1.112,61	1.122,61	1.167,45
34	-4,82	-17,35	1.122,70	1.132,70	1.167,45
35	-3,82	-13,75	1.118,76	1.128,76	1.167,45
36	-5,55	-19,98	1.129,96	1.139,96	1.167,45
37	-4,06	-14,62	1.112,30	1.122,30	1.162,30
38	-0,99	-3,56	1.134,47	1.144,47	1.167,45
39	-1,41	-5,08	1.126,00	1.136,00	1.167,45

z min = Cota piezométrica mínima admissível no nó;

z max = Cota piezométrica máxima admissível no nó.

Tabela 7.32 – Dados dos trechos da rede Paranoá.

Trecho		Comp. (m)	Qmin (m <sup>3</sup> /h)	Qmax (m <sup>3</sup> /h)	Trecho		Comp. (m)	Qmin (m <sup>3</sup> /h)	Qmax (m <sup>3</sup> /h)
Nó M	Nó J				Nó M	Nó J			
1	2	300,00	0,00	10,84	17	18	170,00	0,00	16,00
1	4	270,00	-130,00	-100,00	20	21	300,00	3,30	22,32
1	10	550,00	-14,90	0,00	20	24	230,00	-12,65	0,00
1	29	236,00	107,79	107,79	20	33	320,00	-20,00	0,00
2	3	360,00	-11,56	0,00	21	22	240,00	0,00	25,48
2	5	300,00	-10,34	0,00	22	23	300,00	-23,10	-5,00
3	4	150,00	-15,45	0,00	23	24	370,00	-19,10	0,00
3	6	450,00	-8,36	0,00	23	25	250,00	-25,00	0,00
<b>4</b>	<b>8</b>	220,00	-136,34	-100,00	24	30	200,00	-33,38	-1,95
5	6	340,00	-13,22	0,00	25	26	130,00	-25,48	0,00
6	7	90,00	-22,73	0,00	26	27	310,00	-29,72	0,00
7	8	450,00	-22,05	0,00	26	31	180,00	-10,00	0,00
7	13	250,00	-20,25	0,00	27	28	150,00	-52,60	-17,32
8	9	220,00	0,00	11,94	27	32	240,00	5,25	19,80
<b>8</b>	<b>14</b>	240,00	-186,36	-100,00	28	29	50,00	-55,00	-9,90
9	10	200,00	0,00	22,23	29	30	250,00	21,69	56,21
9	11	280,00	0,00	13,34	29	34	210,00	15,00	33,10
9	17	480,00	-34,77	0,00	30	33	260,00	6,00	36,10
10	12	310,00	0,00	9,80	31	32	160,00	-15,00	-1,00
11	12	220,00	0,00	15,40	33	35	240,00	-12,38	0,00
11	18	520,00	-11,1	0,00	34	35	130,00	2,45	17,40
13	14	430,00	-9,65	0,00	34	36	260,00	5,00	24,73
13	15	150,00	-30,71	0,00	35	37	260,00	-2,72	3,58
<b>14</b>	<b>16</b>	200,00	-198,46	-100,00	36	37	190,00	0,00	13,00
15	16	360,00	-27,20	0,00	36	38	200,00	-5,00	5,16
16	17	200,00	15,50	58,90	37	39	260,00	-5,00	2,00
16	19	780,00	-215,48	-215,48	38	39	290,00	0,00	5,00

Trechos em negrito indicam a configuração em paralelo;

Nó M = Nó a montante;

Nó J = Nó a jusante;

Comp. = Comprimento do trecho;

Qmin = Vazão mínima possível no trecho;

Qmax = Vazão máxima possível no trecho,

#### 7.4.1 Aplicação do Modelo Otimização

A aplicação do modelo de otimização a essa rede resultou em problemas relaxados compostos por 783 variáveis e 649 restrições (240 referentes a limites simples) e problemas exatos compostos por 347 variáveis e 176 restrições (78 referentes a limites simples), exigindo maior tempo computacional a cada resolução dos problemas de programação linear. A maior complexidade da rede também acarretou dificuldades na determinação de limites de vazão mínimos e máximos em cada trecho. Essas dificuldades são relacionadas com a ferramenta computacional utilizada (*Solver*) que possui limitações quanto aos números de variáveis e restrições do problema. Os diâmetros disponíveis em cada trecho são apresentados na tabela 7.33.

Tabela 7.33 – Diâmetros disponíveis nos trechos da rede Paranoá.

Trecho		Diâmetros disponíveis (mm)	Trecho		Diâmetros disponíveis (mm)
Nó M	Nó J		Nó M	Nó J	
1	2	100 a 500	17	18	100 a 500
1	4	100 a 500	20	21	100 a 500
1	10	100 a 500	20	24	100 a 500
1	29	100 a 500	20	33	100 a 500
2	3	100	21	22	100 a 500
2	5	100 a 500	22	23	100 a 500
3	4	150	23	24	100 a 500
3	6	200	23	25	100 a 500
<b>4</b>	<b>8</b>	100 a 500	24	30	100 a 500
5	6	100 a 500	25	26	100 a 500
6	7	100 a 500	26	27	100 a 500
7	8	100 a 500	26	31	100 a 500
7	13	100 a 500	27	28	100 a 500
8	9	100 a 500	27	32	100 a 500
<b>8</b>	<b>14</b>	100 a 500	28	29	100 a 500
9	10	200	29	30	100 a 500
9	11	100 a 500	29	34	100 a 500
9	17	200	30	33	100 a 500
10	12	100 a 500	31	32	100 a 500
11	12	100 a 500	33	35	100
11	18	100 a 500	34	35	100 a 500
13	14	100 a 500	34	36	100 a 500
13	15	100 a 500	35	37	100
<b>14</b>	<b>16</b>	100 a 500	36	37	100
15	16	100 a 500	36	38	200
16	17	200	37	39	100 a 500
16	19	100 a 500	38	39	100 a 500

Nó M = Nó a montante; Nó J = Nó a jusante.

Inicialmente, os intervalos de vazão em cada trecho foram determinados via programação não linear, de acordo com o procedimento apresentado em 5.4. No entanto, com esses intervalos de vazão, o modelo não conduziu a uma diferença entre limites globais satisfatória, após 10.000 nós ativos enumerados. Como após um grande número de enumerações as vazões tendem a se estabilizarem em valores próximos aos ótimos, os intervalos iniciais podem ser aprimorados de forma empírica. Assim, os limites de vazão em cada trecho foram ajustados com base na distribuição de vazões referente à melhor solução encontrada pelo modelo, resultando nos valores da tabela 7.32.

Com esses novos limites de vazão, o modelo gerou o limite inferior global inicial de 38.080.278 e o limite superior global inicial de 44.431.633, atingido após 242 nós ativos enumerados. Após 10.000 nós ativos enumerados, foram obtidos limites globais de 39.659.645 e 40.225.435, correspondendo a uma diferença de 0,0143. A figura 7.15 mostra a evolução das soluções a cada nó. A melhor solução encontrada consta das tabelas 7.34 e 7.35.

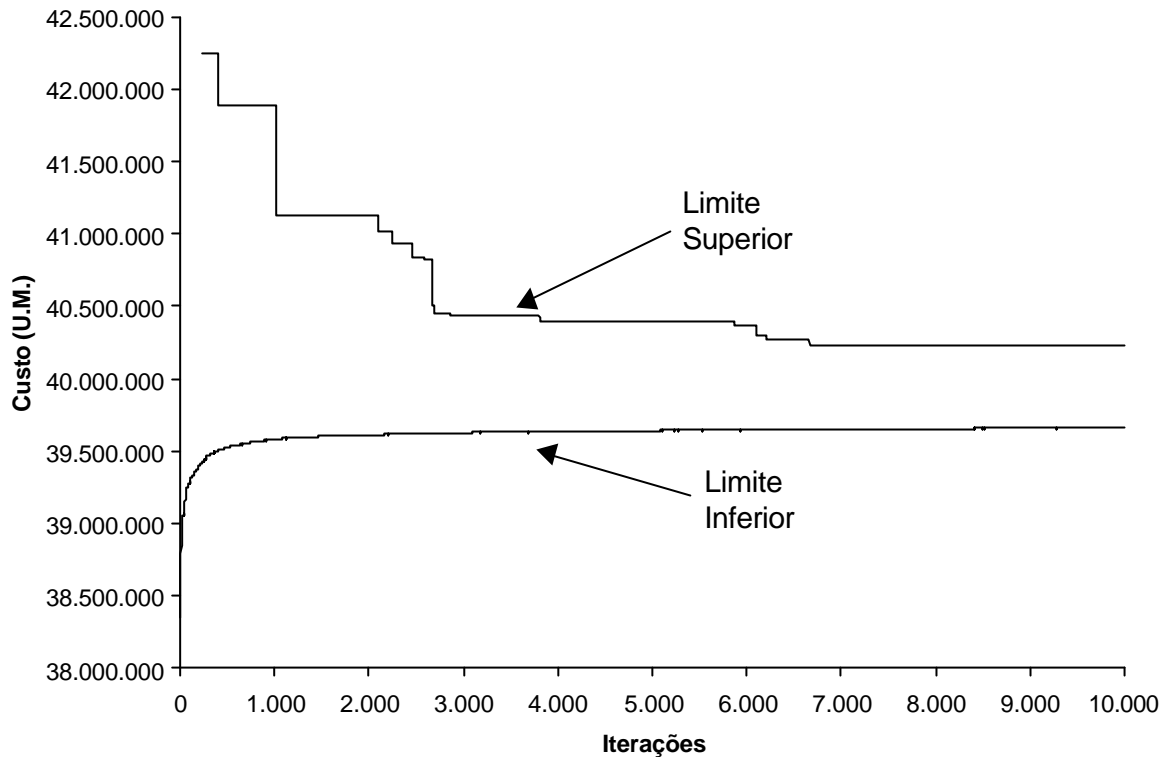


Figura 7.15 – Convergência do modelo de otimização na rede Paranoá.

Ao contrário do exemplo anterior, não foi necessário o uso do processo iterativo do item 5.2 para obtenção de distribuições de vazão factíveis ao problema exato, uma vez que não há anéis na rede existente. Assim, apenas as modificações das equações 5.30 e 5.31 foram introduzidas no modelo, reduzindo-se o tempo computacional de cada enumeração.

Da figura 7.10 depreende-se que, neste exemplo, a convergência se deu de forma bastante lenta, o que pode ser reflexo da dimensão da rede. Como as aproximações das equações não lineares de perda de carga são feitas em cada trecho, o espaço de soluções possíveis torna-se maior quando a quantidade de trechos cresce. Assim, mais problemas relaxados resultam em limites inferiores possíveis, gerando mais nós no processo de busca. Por outro lado, a maior relaxação do problema original parece dificultar a geração de bons limites superiores nas primeiras enumerações, retardando a convergência.

Na rede ótima, dos 44 trechos em projeto, 19 são constituídos por diâmetros duplos, incluindo os trechos em paralelo. Entretanto, pelo menos 9 possuem segmentos com comprimentos menores do que 12 metros e pode ter seus diâmetros unificados sem grandes impactos sobre o projeto ótimo. Muitos trechos podem ser implantados com diâmetro mínimo sem desatender os requisitos de carga hidráulica mínima, representando grande diferença em relação ao projeto original.

Tabela 7.34 – Resultados finais da otimização da rede Paranoá – vazões e diâmetros.

Trecho		Q (m³/h)	D (mm)	L (m)	Trecho		Q (m³/h)	D (mm)	L (m)
Nó M	Nó J				Nó M	Nó J			
1	2	9,76	100	300,00	17	18	29,54	100 150	160,90 9,10
1	4	-401,91	250 300	62,12 207,88	20	21	47,42	100 150	292,23 7,77
1	10	-22,06	100	550,00	20	24	-16,48	100	230,00
1	29	388,05	300	236,00	20	33	-49,12	100	320,00
2*	3*	-10,76	100	360,00	21	22	22,76	100	240,00
2	5	-5,47	100	300,00	22	23	-37,4	100	300,00
3*	4*	-32,01	150	450,00	23	24	-33,47	100	370,00 0
3*	6*	-5,51	200	150,00	23	25	-28,3	100	250,00
<b>4</b>	<b>8</b>	-452,39	<b>300</b> <b>400</b>	<b>212,89</b> <b>7,11</b>	24	30	-74,33	100 150	199,07 0,93
5	6	-15,88	100 150	300,10 39,90	25	26	-56,34	100 150	129,24 0,76
6	7	-32,19	100 150	88,19 1,81	26	27	-57,59	100 150	308,26 1,74
7	8	-19,38	100 150	430,98 19,02	26	31	-18,26	100	180,00
7	13	-30,92	100	250,00	27	28	-129,35	150	150,00
8	9	7,96	100	220,00	27	32	55,2	100	240,00
<b>8</b>	<b>14</b>	-507,59	<b>300</b>	<b>240,00</b>	28	29	-138,64	150 200	18,44 31,56
9*	10*	48,69	200	200,00	29	30	132,85	150 200	236,38 13,62
9	11	10,68	100 150	260,20 19,80	29	34	104,03	200	210,00
9*	17*	-80,68	200	480,00	30	33	35,08	100	260,00
10	12	6,04	100	310,00	31	32	-35,47	100	160,00
11	12	5,73	100	220,00	33*	35*	-29,69	100	240,00
11	18	-11,21	100	520,00	34	35	50,9	100	124,72 5,28
13	14	-16,57	100	430,00	34	36	35,78	100	255,30 4,70
13	15	-33,39	100	150,00	35*	37*	7,46	100	260,00
<b>14</b>	<b>16</b>	-554,22	<b>300</b>	<b>178,82</b> <b>21,18</b>	36*	37*	5,85	100	190,00
15	16	-56,68	150 200	335,23 24,77	36*	38*	9,95	200	200,00
16*	17*	136,79	200	200,00	37	39	-1,31	100	260,00
16	19	-775,73	400 500	745,29 34,71	38	39	6,39	100 150	271,36 18,64

Trechos em negrito indicam a configuração em paralelo;  
Trechos existentes (diâmetros fixos);

O fluxo preferencial foram associados aos trechos em paralelo, pois a capacidade hidráulica instalada permitiu que maiores vazões fossem transportadas, sem grandes perdas de carga e sem acréscimo de custo. Todavia, outros trechos existentes não atraíram grandes vazões, por possuírem diâmetros mínimos.



Tabela 7.35 – Resultados finais da otimização da rede Paranoá – cargas hidráulicas.

Nó	Carga hidráulica (m)		Cota piezométrica (m)	
	ETEP	Modelo proposto	ETEP	Modelo proposto
1	26,56	17,65	1160,93	1152,02
2	26,68	17,65	1160,54	1151,51
3	20,93	12,63	1161,26	1152,96
4	22,54	15,57	1161,82	1154,85
5	30,74	21,89	1160,54	1151,69
6	22,94	14,64	1161,27	1152,97
7	20,62	13,47	1161,48	1154,33
8	19,09	13,45	1162,59	1156,95
9	23,32	17,80	1162,21	1156,69
10	26,20	20,64	1161,80	1156,24
11	30,77	24,96	1161,98	1156,17
12	33,88	28,15	1161,76	1156,03
13	15,60	10,73	1162,79	1157,92
14	15,53	11,73	1163,66	1159,86
15	12,83	10,00	1163,23	1160,40
16	13,93	11,71	1164,71	1162,49
17	15,84	12,17	1163,11	1159,44
18	19,33	13,94	1162,70	1157,31
19	0,00	0,00	1167,45	1167,45
20	38,74	22,57	1143,82	1127,65
21	43,76	20,12	1142,00	1118,36
22	40,82	15,53	1141,69	1116,40
23	34,30	13,46	1143,37	1122,53
24	31,89	15,92	1144,65	1128,68
25	36,11	17,36	1144,32	1125,57
26	27,12	13,62	1144,71	1131,21
27	19,19	18,12	1146,28	1145,21
28	16,59	19,12	1146,91	1149,44
29	18,38	21,66	1147,00	1150,28
30	24,06	21,45	1145,79	1143,18
31	29,36	16,87	1144,67	1132,18
32	20,19	10,00	1145,33	1135,14
33	32,12	25,85	1144,73	1138,46
34	23,24	26,61	1145,94	1149,31
35	26,72	26,02	1145,48	1144,78
36	14,96	14,53	1144,92	1144,49
37	32,42	31,95	1144,72	1144,25
38	10,43	10,00	1144,90	1144,47
39	18,72	18,26	1144,72	1144,26

Como o modelo considera livre a escolha dos comprimentos dos segmentos dos trechos que serão dispostos em paralelo, ajustes devem ser promovidos para contemplar as parcelas de coeficiente de resistência e custo referentes aos trechos existentes. Procedendo-se na forma do item 5.3, os trechos (4;8), (8;14) e (14;16) são modificados como mostra a tabela 7.36. O ajuste desses trechos resultou em menor custo de implantação, já que a parcela referente aos trechos existentes foi excluída.

Tabela 7.36 – Ajuste dos trechos dispostos em paralelo na rede Paranoá.

Trecho	Parâmetro	Trecho disposto em paralelo					
		4 8		8 14		14 16	
original	D1 / L1	300mm	212,89m	300mm	240,00	300mm	178,82m
	D2 / L2	400mm	7,11m			400mm	21,18m
	Keq	$2,54 \cdot 10^{-5}$		$2,84 \cdot 10^{-5}$		$2,18 \cdot 10^{-5}$	
existente	Dfix	150mm		200mm		200mm	
	Kfix	$1,5 \cdot 10^{-3}$		$4,0 \cdot 10^{-4}$		$3,4 \cdot 10^{-4}$	
em paralelo	Deq	288,40mm		270,49mm		276,58mm	
	Dpar1 / Lpar1	250mm	32,56m	250mm	110,06m	250mm	67,92m
	Dpar2 / Lpar2	300mm	187,44m	300mm	129,94m	300mm	132,08m
Custo ótimo original (UM)		40.225.435,43					
Custo após ajuste (UM)		39.816.160,25					

Em relação ao projeto da ETEP, o modelo conseguiu uma redução de 39,7% no custo de implantação. Observa-se ainda que, mesmo com maior capacidade hidráulica e custo, a rede original atinge carga hidráulica próxima à mínima no nó 38 (10,43 m), em condições normais de funcionamento. Já a rede ótima atinge carga hidráulica mínima (10,00 m) nos nós 15, 32 e 38, evidenciando sua menor capacidade hidráulica.

#### 7.4.2 Aplicação do Modelo de Confiabilidade

A aplicação do modelo de confiabilidade partiu da rede ótima com os trechos em paralelo devidamente ajustados. Como existem 54 trechos, são identificadas 55 configurações de falha, incluindo a operação íntegra de todos os trechos. Foram arbitradas as cargas hidráulicas de 1m e 10m para os parâmetros Hmin e Hacc, respectivamente.

As probabilidades de operação de cada trecho são calculadas como nos exemplos anteriores, à exceção dos trechos com tubulações em paralelo. Para que esses trechos estejam operando, todos os segmentos que o compõem e o trecho existente devem operar simultaneamente. Assim a probabilidade de operação do trecho é dada pelo produto das probabilidades de cada segmento e do trecho existente.

Uma vez que apenas uma das tubulações pode estar fora de operação, garantindo a operação do mesmo, a verdadeira probabilidade de operação seria maior do que a calculada. Contudo, devido à limitação do modelo hidráulico em tratar desse caso particular, considera-se que todo o trecho estará fora de operação na configuração de falha, associada à respectiva probabilidade de ocorrência.

Outra limitação do modelo diz respeito aos trechos críticos da rede, cuja falha coloca fora de serviço partes importantes do sistema, agindo como trechos ramificados. Isso acontece com os trechos (16;19), cuja falha tira de operação toda a rede, e (1;29), único caminho para

abastecimento da parte mais baixa da rede. Como o modelo hidráulico utilizado é incapaz de calcular cargas hidráulicas no caso de falhas nesses trechos, considera-se que a performance hidráulica global é nula, ainda que a carga hidráulica seja, de fato, positiva em alguns nós. Essa simplificação implica na subestimativa do índice de confiabilidade.

Procedendo-se como nos exemplos anteriores, foram obtidos índices de confiabilidade para cada projeto de rede, considerando o projeto original da ETEP, a rede ótima e as duas alternativas de unificação de trechos (tabela 7.37). Como esperado, a rede da ETEP é mais confiável, uma vez que os maiores diâmetros permitem o abastecimento mais adequado da rede quando da falha de algum trecho. Já a rede ótima é a menos confiável, visto que os diversos trechos de diâmetro mínimo prejudicam a performance dos nós, no caso de falha na rede. Todavia, em razão dos parâmetros Hmin e Hace arbitrados, os índices não variam muito de uma rede para outra, em termos absolutos, o que não acontece com o custo.

Tabela 7.37 –Resultados obtidos por diversos estudos na rede Paranoá.

<b>Estudo</b>	<b>Custo (U.M.)</b>	<b>Confiabilidade ICF</b>
ETEP (custo estimado)	66.004.452,00	0,99925333
Modelo proposto (trechos duplos ajustados)	39,816,160,25	0,99736521
Modelo proposto (unificação por maiores diâmetros)	50.831.136,22	0,99878267
Modelo proposto (unificação por maiores comprimentos)	39.698.272,00	0,99823924

Devido ao maior número de configurações de falha e à maior complexidade da rede, em alguns casos são necessárias várias simulações hidráulicas para obtenção dos índices de performance. Com isso, o tempo computacional exigido é consideravelmente maior em relação aos outros exemplos, indicando que, para rede maior porte, a aplicação do algoritmo de alteração de diâmetros pode ser inviabilizada.

O processo de unificação de diâmetros foi executado a partir da rede ótima com os ajustes nos trechos em paralelo. Ao todo, foram efetuadas 53 alterações na rede, até que a variação de confiabilidade em relação ao custo tornou-se insignificante. Os resultados, apresentados na tabela 7.38, mostram que a unificação pelo maior diâmetro nem sempre é vantajosa, como observado nos exemplos anteriores. Aqui, a predominância de trechos em que o maior diâmetro refere-se ao menor comprimento orientou a escolha das alterações para os trechos de diâmetro único. Isso porque, nesses trechos, o acréscimo de custo decorrente da unificação não compensa o ganho de confiabilidade.

Por outro lado, a unificação pelos diâmetros referentes aos maiores comprimentos significou redução de capacidade hidráulica, confiabilidade e custo, conforme a tabela 7.37. Como a

carga hidráulica mínima é desrespeitada apenas no nó 5 (9,99m), pode-se afirmar que esse dimensionamento é satisfatório, ainda que esse julgamento seja subjetivo.

Tabela 7.38 – Processo de alteração de diâmetros na rede Paranoá.

Iteração	Trecho alterado	ICF	Custo – C (\$)	D ICF (%)	D C (%)	D ICF/D C (%)
0	-	0,997677	39.816.160	-	-	-
1	<b>4 8</b>	0,997810	39.865.619	$1,333.10^{-2}$	$1,242.10^{-1}$	$1,073.10^{+1}$
2	<b>14 16</b>	0,998026	39.968.789	$3,498.10^{-2}$	$3,833.10^{-1}$	$9,126.10^0$
3	28 29	0,998091	40.000.414	$4,150.10^{-2}$	$4,628.10^{-1}$	$8,967.10^0$
4	<b>1 4</b>	0,998206	40.094.774	$5,302.10^{-2}$	$6,998.10^{-1}$	$7,577.10^0$
5	<b>8 14</b>	0,998329	40.261.955	$6,535.10^{-2}$	$1,120.10^0$	$5,837.10^0$
6	<b>24 30</b>	0,998459	40.744.700	$7,838.10^{-2}$	$2,332.10^0$	$3,361.10^0$
7	<b>29 30</b>	0,998542	41.150.092	$8,670.10^{-2}$	$3,350.10^0$	$2,588.10^0$
8	22 23	0,998678	41.877.592	$1,003.10^{-1}$	$5,177.10^0$	$1,938.10^0$
9	1 29	0,998744	42.623.352	$1,069.10^{-1}$	$7,050.10^0$	$1,517.10^0$
10	8 9	0,998788	43.156.852	$1,114.10^{-1}$	$8,390.10^0$	$1,327.10^0$
11	28 29	0,998795	43.254.302	$1,121.10^{-1}$	$8,635.10^0$	$1,298.10^0$
12	<b>27 28</b>	0,998809	43.511.552	$1,135.10^{-1}$	$9,281.10^0$	$1,223.10^0$
13	<b>1 10</b>	0,998883	44.845.302	$1,209.10^{-1}$	$1,263.10^{+1}$	$9,570.10^{-1}$
14	6 7	0,998904	45.059.163	$1,230.10^{-1}$	$1,317.10^{+1}$	$9,340.10^{-1}$
15	7 13	0,998951	45.665.413	$1,277.10^{-1}$	$1,469.10^{+1}$	$8,692.10^{-1}$
16	13 15	0,998988	46.029.163	$1,314.10^{-1}$	$1,560.10^{+1}$	$8,421.10^{-1}$
17	<b>15 16</b>	0,999056	46.604.082	$1,382.10^{-1}$	$1,705.10^{+1}$	$8,108.10^{-1}$
18	6 7	0,999067	46.758.432	$1,393.10^{-1}$	$1,744.10^{+1}$	$7,991.10^{-1}$
19	25 26	0,999082	47.071.839	$1,408.10^{-1}$	$1,822.10^{+1}$	$7,728.10^{-1}$
20	<b>16 19</b>	0,999223	51.021.131	$1,550.10^{-1}$	$2,814.10^{+1}$	$5,506.10^{-1}$
21	27 32	0,999260	51.603.131	$1,587.10^{-1}$	$2,960.10^{+1}$	$5,360.10^{-1}$
22	23 24	0,999284	52.500.381	$1,611.10^{-1}$	$3,186.10^{+1}$	$5,056.10^{-1}$
23	23 25	0,999304	53.106.631	$1,631.10^{-1}$	$3,338.10^{+1}$	$4,886.10^{-1}$
24	<b>24 30</b>	0,999320	53.449.631	$1,647.10^{-1}$	$3,424.10^{+1}$	$4,810.10^{-1}$
25	14 16	0,999335	54.081.631	$1,662.10^{-1}$	$3,583.10^{+1}$	$4,638.10^{-1}$
26	7 8	0,999355	55.126.757	$1,682.10^{-1}$	$3,845.10^{+1}$	$4,374.10^{-1}$
27	8 14	0,999368	55.885.157	$1,695.10^{-1}$	$4,036.10^{+1}$	$4,200.10^{-1}$
28	15 16	0,999378	56.586.797	$1,705.10^{-1}$	$4,212.10^{+1}$	$4,048.10^{-1}$
29	13 14	0,999407	57.629.547	$1,734.10^{-1}$	$4,474.10^{+1}$	$3,876.10^{-1}$
30	4 8	0,999414	58.324.747	$1,741.10^{-1}$	$4,649.10^{+1}$	$3,745.10^{-1}$
31	25 26	0,999415	58.547.697	$1,742.10^{-1}$	$4,705.10^{+1}$	$3,703.10^{-1}$
32	<b>5 6</b>	0,999416	59.275.440	$1,743.10^{-1}$	$4,887.10^{+1}$	$3,567.10^{-1}$
33	<b>34 35</b>	0,999423	59.577.886	$1,750.10^{-1}$	$4,963.10^{+1}$	$3,526.10^{-1}$
34	<b>17 18</b>	0,999431	59.968.068	$1,758.10^{-1}$	$5,061.10^{+1}$	$3,474.10^{-1}$
35	2 5	0,999443	60.695.568	$1,770.10^{-1}$	$5,244.10^{+1}$	$3,376.10^{-1}$
36	1 2	0,999474	61.423.068	$1,801.10^{-1}$	$5,427.10^{+1}$	$3,319.10^{-1}$
37	31 32	0,999480	61.811.068	$1,807.10^{-1}$	$5,524.10^{+1}$	$3,271.10^{-1}$
38	5 6	0,999487	62.394.168	$1,814.10^{-1}$	$5,671.10^{+1}$	$3,199.10^{-1}$
39	1 4	0,999494	63.247.368	$1,821.10^{-1}$	$5,885.10^{+1}$	$3,095.10^{-1}$
40	7 8	0,999512	64.019.118	$1,839.10^{-1}$	$6,079.10^{+1}$	$3,026.10^{-1}$
41	11 18	0,999529	65.280.118	$1,856.10^{-1}$	$6,395.10^{+1}$	$2,903.10^{-1}$
42	<b>17 18</b>	0,999543	65.571.668	$1,870.10^{-1}$	$6,469.10^{+1}$	$2,891.10^{-1}$
43	<b>29 30</b>	0,999546	66.058.918	$1,873.10^{-1}$	$6,591.10^{+1}$	$2,842.10^{-1}$
44	<b>29 34</b>	0,999548	66.468.208	$1,875.10^{-1}$	$6,694.10^{+1}$	$2,802.10^{-1}$

Tabela 7.38 – Processo de alteração de diâmetros na rede Paranoá (continuação).

Iteração	Trecho alterado	ICF	Custo – C (U.M.)	D ICF (%)	D C (%)	D ICF/D C (%)
45	<b>26 27</b>	0,999550	67.215.739	$1,877.10^{-1}$	$6,882.10^{+1}$	$2,728.10^{-1}$
46	30 33	0,999551	67.846.238	$1,878.10^{-1}$	$7,040.10^{+1}$	$2,668.10^{-1}$
47	34 36	0,999551	68.465.341	$1,878.10^{-1}$	$7,195.10^{+1}$	$2,611.10^{-1}$
48	34 36	0,999552	68.911.241	$1,879.10^{-1}$	$7,307.10^{+1}$	$2,572.10^{-1}$
49	20 24	0,999552	69.468.991	$1,879.10^{-1}$	$7,447.10^{+1}$	$2,524.10^{-1}$
50	<b>34 35</b>	0,999552	69.691.941	$1,879.10^{-1}$	$7,503.10^{+1}$	$2,505.10^{-1}$
51	11 12	0,999552	70.225.441	$1,879.10^{-1}$	$7,637.10^{+1}$	$2,461.10^{-1}$
52	<b>10 12</b>	0,999552	70.977.191	$1,879.10^{-1}$	$7,826.10^{+1}$	$2,401.10^{-1}$
53	9 11	0,999553	71.608.176	$1,880.10^{-1}$	$7,985.10^{+1}$	$2,355.10^{-1}$

Trechos em negrito são compostos por diâmetros duplos;

ICF = Índice de confiabilidade;

$\Delta$  ICF = Variação da confiabilidade em relação à rede ótima;

$\Delta$  C = Variação do custo em relação à rede ótima.

As figuras 7.16 e 7.17 apresentam as variações da confiabilidade com o acréscimo de custo decorrente do aumento de capacidade hidráulica. Observa-se que até a sexta alteração o acréscimo de custo é muito reduzido em detrimento do ganho de confiabilidade, que é significativo. A partir daí, a variação de confiabilidade é cada vez menor até que torna-se praticamente nula, havendo somente acréscimo de custo a partir da 43ª alteração.

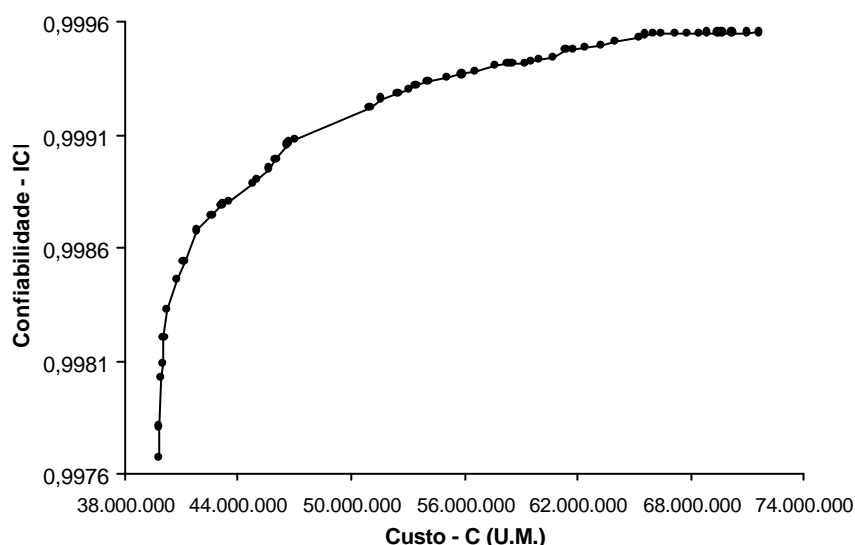


Figura 7.16 – Variação da confiabilidade em relação ao custo na rede Paranoá.

Os resultados são semelhantes aos dos exemplos anteriores, existindo um nível máximo de confiabilidade associado aos parâmetros  $H_{min}$  e  $H_{ace}$  escolhidos. Por sua vez, a variação do custo é pequena inicialmente, obedecendo a uma tendência linear a partir de certo ponto.

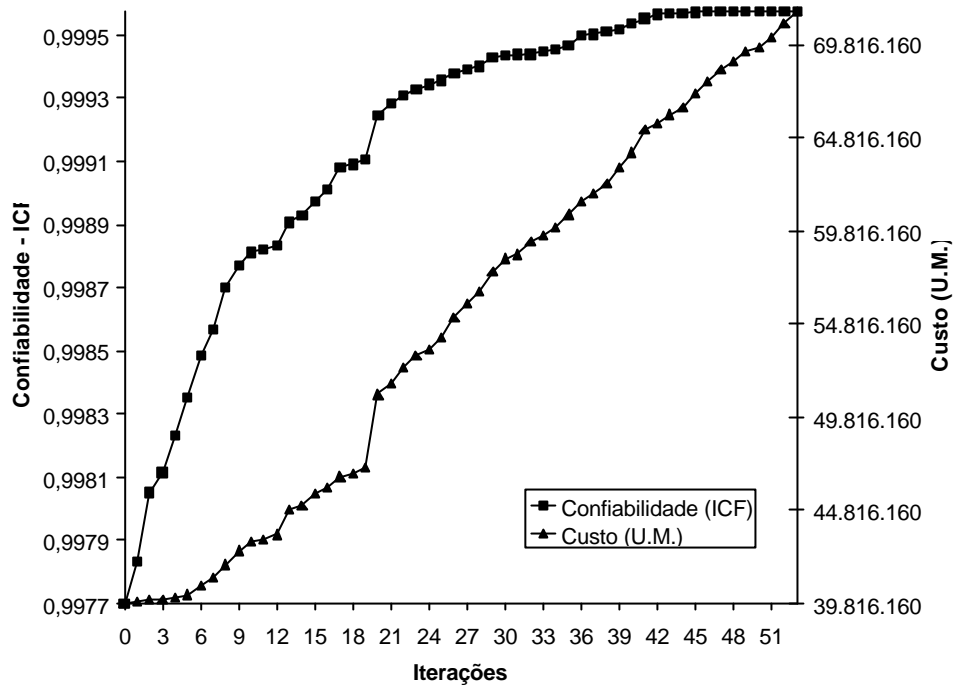


Figura 7.17 – Evolução da confiabilidade e do custo a cada alteração na rede Paranoá.

A figura 7.18 mostra a variação da relação confiabilidade/custo, que sofre rápido decaimento nas dez primeiras alterações. Isso se deve às altas e decrescentes variações de confiabilidade às baixas e crescentes variações de custo. Após algumas iterações é clara a estabilização da relação, devido ao anulamento da variação de confiabilidade, em detrimento do crescimento constante do custo. Como nos exemplos anteriores, a figura 7.18 esclarece quais alterações que devem ser feitas na rede ótima, considerando-se aspectos de confiabilidade e custo. No entanto, o fato do algoritmo não lidar com a unificação pelo maior comprimento parece ter prejudicado a análise, uma vez que essas alterações poderiam resultar em pequeno acréscimo de custo sem piora significativa de performance.

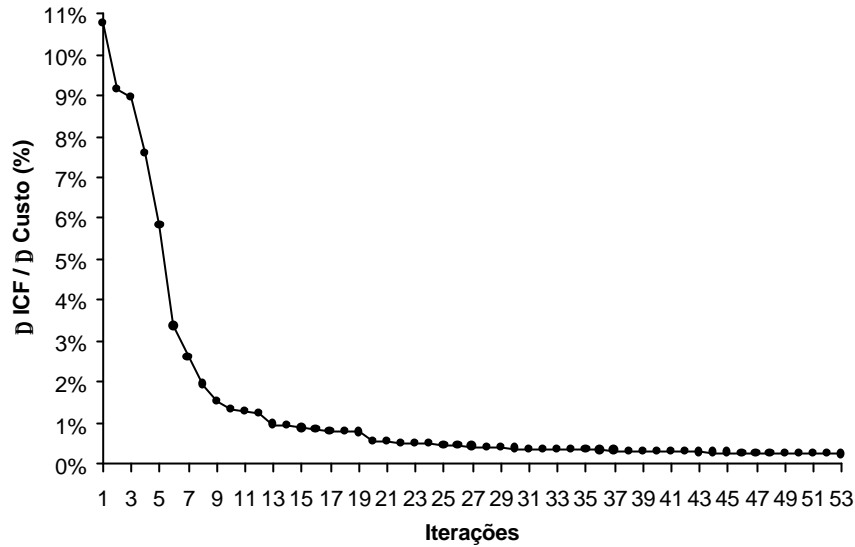


Figura 7.18 – Variação da relação  $\Delta ICF / \Delta C$  na rede Paranoá.

Em verdade, o processo de unificação dos diâmetros da rede ótima relaciona-se diretamente com os diâmetros comerciais disponíveis no modelo de otimização. Os trechos de diâmetros duplos em que um dos segmentos tem comprimento insignificante indicam que o diâmetro equivalente seria um pouco maior ou menor do que o diâmetro comercial disponível. Disponibilizando-se mais diâmetros, de modo a reduzir o intervalo entre um valor comercial e outro, os segmentos dos trechos tenderiam a ser mais uniformes.

Testes adicionais foram promovidos na rede Paranoá no intuito de se verificar o comportamento da confiabilidade das redes original e ótima sob condições distintas de demanda. Usualmente, as vazões de projeto referem-se a uma determinada condição futura para a qual a rede é projetada. Até atingir o valor de projeto, as demandas nodais crescem anualmente a uma taxa proporcional ao crescimento populacional. Atingidas as vazões de projeto, as demandas continuam aumentando e a rede tende a não desempenhar suas funções adequadamente, necessitando de reforços.

Uma vez que as redes, em geral, são superdimensionadas, a perda de desempenho só é verificada para vazões significativamente superiores às de projeto, retardando os investimentos necessários. Já a rede ótima, projetada para atender à demanda de projeto ao menor custo possível, tende a perder performance rapidamente.

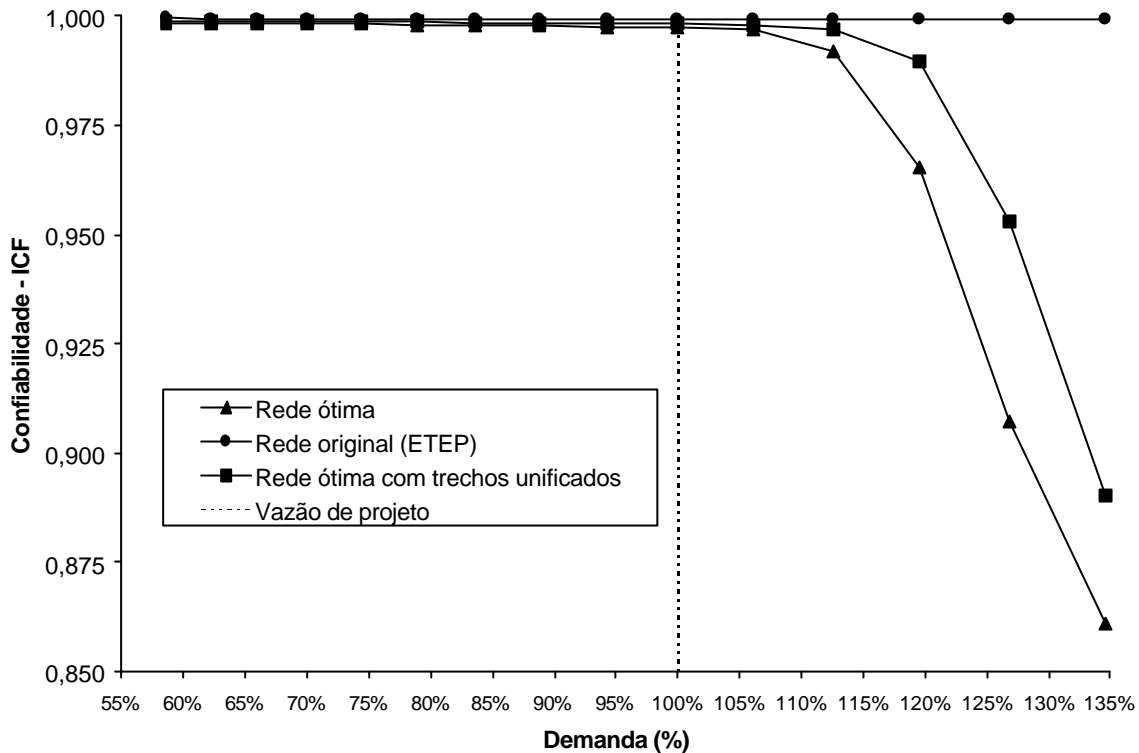


Figura 7.19 – Variação da confiabilidade com a evolução da demanda na rede Paranoá.

Esse efeito é ilustrado na figura 7.19, em que o índice de confiabilidade é calculado para vários níveis de demanda. Considerando-se que a vazão de projeto refere-se a 100%, observa-se que, ao longo de suas vidas úteis as redes original (ETEP) e ótima não guardam grandes diferenças em termos de confiabilidade. Entretanto, quando a vazão de projeto é excedida, a confiabilidade da rede ótima decai verticalmente, em detrimento da rede original, que mantém o índice com pequena variação.

Portanto, atingida a vazão de projeto, a rede ótima necessitará de urgentes investimento para garantir o adequado abastecimento, enquanto que a rede original manterá suas performance por mais alguns anos. Contudo, é possível demonstrar que, mesmo com investimentos mais freqüentes, o valor presente da rede ótima ao longo de extensos períodos de projeto é, ainda, inferior ao referente à rede original.



## 8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

As redes de distribuição de água, como componentes finais dos sistemas de abastecimento de água, representam a maior parte dos investimentos e possuem estreita relação com a qualidade dos serviços. No intuito de minimizar os custos implantação, métodos de otimização têm sido utilizados desde a década de setenta, sendo que os primeiros modelos de otimização global foram propostos na década de noventa. Ao mesmo tempo, métodos de mensuração da confiabilidade das redes têm sido propostos, ainda que não consensuais sob diversos aspectos.

Contudo, a efetiva aplicação dos modelos em casos reais de dimensionamento, considerando as particularidades de cada sistema, ainda constitui desafio a ser superado. Nesse contexto, a presente pesquisa buscou implementar um eficaz modelo de otimização para redução de custos de implantação e desenvolver um modelo de análise de confiabilidade, tendo como foco principal a aplicação a situações reais para avaliação de seus desempenhos.

O modelo de otimização implementado, baseado na formulação de Sherali *et al.* (1998), mostrou-se eficaz na determinação do dimensionamento de mínimo custo global de redes de distribuição de água. A partir da definição do espaço de soluções possíveis, por meio do estabelecimento de intervalos de vazões em cada trechos, o modelo pode atingir um custo mínimo cuja diferença em relação ao mínimo global é pré-especificada.

O modelo pode ser utilizado em redes de porte médio com relativa eficiência. Nas aplicações a casos reais, as reduções de custo obtidas em relação aos projetos originais variam de 40% a 50%, evidenciando a qualidade do modelo. No entanto, a velocidade de convergência e o tempo computacional exigido têm estreita relação com os intervalos de vazão inicialmente especificados para os trechos.

As adaptações efetuadas no modelo para o caso de expansão de redes foram bem sucedidas no caso da rede de Apucarana. Entretanto, no caso da rede do Paranoá, não foram encontradas soluções possíveis após centenas de enumerações, fazendo com que apenas parte das adaptações fosse necessária para a convergência do modelo. No caso de reforço de redes, a flexibilidade do modelo afastou a necessidade de adaptações, promovendo-se apenas adequações nos resultados obtidos.

Em redes de maior porte (mais de 40 nós) é possível que a aplicação do modelo de otimização demande, ainda, recursos computacionais mais avançados do que os atuais

microcomputadores. Primeiramente, a necessidade de determinação de intervalos de vazão em todos os trechos da rede pode comprometer a qualidade dos resultados, já que a escolha equivocada pode excluir o ótimo global da região de busca. Em segundo lugar, o número de nós ativos necessários para uma adequada convergência pode ser muito alto, já que existem muitos intervalos de vazão a serem partidos e o espaço de soluções possíveis é extenso.

O modelo de análise de confiabilidade desenvolvido conseguiu quantificar a performance hidráulica das redes, produzindo índices que podem auxiliar no seu dimensionamento. A análise hidráulica sob diversas configurações de falha, associadas a probabilidades de ocorrência, pode ser bastante útil na previsão do comportamento de redes e na identificação de áreas críticas. Em suas aplicações, o modelo mostrou que não é necessária a simulação de todas as situações possíveis para uma boa estimativa da confiabilidade, uma vez que um pequeno grupo de configurações de falha pode ser significativo e satisfatório em termos probabilísticos.

O algoritmo de unificação e incremento de diâmetros foi desenvolvido de forma simples e objetiva. Sua aplicação mostrou claramente a relação existente entre custo, confiabilidade e capacidade hidráulica, uma vez que a alteração de parâmetros físicos, como diâmetros de tubulações, produziu variações nos índices de confiabilidade e no custo de implantação das redes. Também como resultado, o algoritmo mostrou que existe um grupo de alterações que melhora a confiabilidade da rede sem grandes impactos no custo de implantação e que, após um determinado nível de capacidade hidráulica, a confiabilidade torna-se indiferente às modificações físicas, que passam a ter reflexo apenas no custo.

Esse resultado é particularmente importante nos dimensionamentos obtidos pelo modelo de otimização, que podem apresentar trechos compostos por dois diâmetros. O algoritmo mostrou que a unificação desses trechos com base no segmento de maior comprimento não implica em grandes acréscimos de custo e pode ser vantajosa em relação à confiabilidade.

Os testes realizados na rede Paranoá evidenciaram que a rede ótima atende estritamente os requisitos de carga hidráulica e está associada a uma determinada demanda de projeto. O acréscimo de demanda implica no rápido decréscimo de confiabilidade, o que não acontece quando a rede é superdimensionada. Contudo, as performances hidráulicas e, conseqüentemente, o índice de confiabilidade, estão diretamente relacionados com as cargas hidráulicas mínima e aceitável previamente estabelecidas, podendo-se proceder análises de confiabilidade em várias faixas de variação de carga hidráulica nos nós.

Apesar das aplicações bem sucedidas, o modelo de análise de confiabilidade possui deficiências e limitações que comprometem o seu uso em alguns casos. Por exemplo, as configurações de falha em que trechos ramificados são rompidos não pode ser analisada pelo modelo hidráulico. Nesses casos, como uma simplificação necessária, a performance hidráulica global é considerada nula, ainda que alguns nós não sejam afetados pela falha mecânica. Da mesma forma, é possível que *layouts* não testados conduzam a erros e inconsistências no modelo hidráulico, impossibilitando a análise de confiabilidade.

Tanto o modelo de otimização como o de análise da confiabilidade possuem flexibilidade suficiente para adequação às condições típicas brasileiras e às normas nacionais. Os requisitos regionais de carga hidráulica e diâmetros mínimos podem ser facilmente estabelecidos antes da aplicação do modelo de otimização, assim como as cargas hidráulicas mínimas e aceitáveis do modelo de análise de confiabilidade, que definem as funções de performance. Por outro lado, a unificação de diâmetros nos casos necessários procura se adequar às condições construtivas e às dificuldades operacionais brasileiras, como o cadastramento de redes de água.

Uma vez estabelecido um modelo para determinação do custo mínimo global de redes, a sua aplicação no contexto do dimensionamento e planejamento de sistemas de abastecimento de água deve ser melhor estudada. Como redes de custo ótimo são associadas à mínima capacidade hidráulica, investimentos para ampliação e reforço do sistema tendem a ser necessários em menores intervalos de tempo. Ao contrário, redes superdimensionadas podem continuar suprindo as demandas satisfatoriamente por maiores períodos de tempo. Portanto, modelos de otimização de custo podem ser utilizados na previsão e planejamento de investimentos de longo prazo para manutenção da qualidade do serviço.

Como recomendações, os esforços para o aprimoramento do modelo de otimização deveriam estar focados na redução da quantidade de nós enumerados e do tempo computacional. O menor tempo computacional torna-se particularmente importante para a viabilização das aplicações em redes de grande porte. Nesse sentido, poderiam ser testadas:

- Redução do número de variáveis sujeitas à partição no processo *branch and bound*. Alguns estudos já mostram que é possível proceder a busca partindo-se os intervalos de vazão de apenas uma parte dos trechos da rede (Costa et al, 2001 e Sherali et al, 2001), com resultados promissores;

- Novas estratégias de partição dos intervalos de vazão, visto que a escolha do trecho a ter o intervalo de vazão partido pode ter influência na velocidade de convergência do modelo;
- Implementação de método de otimização não linear para aprimorar os limites superiores no processo de busca. De acordo com a base teórica do modelo, o problema exato poderia ser resolvido pela minimização não linear do custo dentro dos intervalos de vazão especificados, ao invés da minimização com vazões fixadas;
- Estudar técnicas de racionalização dos códigos computacionais, particularmente para o armazenamento das informações da árvore de busca, visando a melhor alocação de memória e a viabilização de mais enumerações;
- Promover adaptações para possibilitar o uso do modelo de otimização em redes com a presença de reservatórios múltiplos, válvulas e bombas, incluindo custos de energia.

Quanto ao modelo de análise de confiabilidade, estudos poderiam ser desenvolvidos visando o aprimoramento do modelo e a identificação de possíveis aplicações, como por exemplo:

- Aprimorar o modelo hidráulico para que o rompimento de trechos que isolam partes da rede seja analisado de forma mais consistente, considerando a performance hidráulica dos nós que não são afetados pela falha;
- Desenvolver novas funções de performance hidráulica e analisar sua influência sobre o índice de confiabilidade;
- Estudar as relações entre a capacidade hidráulica, a confiabilidade e os prejuízos econômicos e sociais decorrentes da deficiência de abastecimento. Apesar das funções de performance hidráulica tentarem estabelecer essa relação de forma subjetiva, ainda não existem estudos concretos nesse sentido;
- Implementar métodos de otimização para maximizar a confiabilidade ou minimizar os prejuízos causados por deficiências. O método de otimização deve ser compatível com a análise de confiabilidade, realizada por meio de aplicações discretas do modelo hidráulico;
- Aprimorar o algoritmo de unificação e incremento de diâmetros, uma vez que a melhor alteração na rede é analisada a cada iteração. Por exemplo, métodos de programação dinâmica poderiam ser empregados para determinar qual a melhor seqüência de alterações.

Afora as limitações e necessidades de aprimoramento dos modelos testados, fica evidente a que técnicas de otimização e análise de confiabilidade, utilizadas na fase de projeto, podem efetivamente contribuir para a redução dos custos de implantação de redes de distribuição de água e para a melhoria da qualidade dos serviços. Essa contribuição torna-se ainda mais valiosa em países em desenvolvimento, onde são cotidianas as deficiências dos sistemas de abastecimento e insuficientes os investimentos públicos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alperovits, E. e Shamir, U. (1977). "Design of optimal water distributon systems." *Water Resources Research*, **13**(6), 885-900.
- ABNT (1994). *Projeto de Rede de Água pra Abastecimento Público – NBR 12218*. Associação Brasileira de Normas Técnicas – ABNT, Rio de Janeiro, RJ, 4p.
- AWWA (1989). *Manual of Water Supply Practices - Distribution Network Analysis for Water Utilities (M32)*. 1ª ed., American Water Works Association – AWWA, Denver, E.U.A., 102p.
- Azevedo Netto, J. M., Martins, J. A., Puppi, I. C., Netto, F. B. e Franco, P. N. (1973). *Planejamento de Sistemas de Abastecimento de Água*. Universidade Federal do Paraná e Organização Pan-Americana da Saúde, Curitiba, PR, 281p.
- Barbosa, P. S. F. (1997). "Modelos de Programação Linear em Recursos Hídricos." In: Porto, R. L. L. (org.) *Técnicas Quantitativas para o Gerenciamento de Recursos Hídricos*. 1ª ed., Editora da Universidade-UFRGS/ABRH, Porto Alegre, RS, 420p.
- Ben-Tal, A., Eiger, G. e Gershovitz, V. (1994). "Global minimization by reducing the duality gap." *Mathematical Programming*, **63**, 193-212.
- Catuneanu, V. M. e Mihalanche, A. N. (1989). *Reliability Fundamentals*. Editura Academiei Republich Socialiste România, Bucharest, Romania, 240p.
- Converse, A. O. (1970). *Optimization*. Holt, Rinehart and Winston, INC., New York, E.U.A., 295p.
- Cooper, L. e Steinberg, D. (1970). *Introduction to Methods of Optimization*. WB Saunders Company, Philadelphia, E.U.A., 381p.
- Costa, A. L. H., Medeiros, J. L. e Pessoa, F. L. P. (2001). "Global optimzation of water distribution networks through a reduced space branch-and-bound search." *Water Resources Research*, **37**(4), 1083-1090.
- Cullinane, M. J., Lansey, K. E. e Mays, L. W. (1992). "Optimization-availability-based design of water-distribution networks." *Journal of Hydraulic Engineering*, **118**(3), 420-441.
- Cunha, M. C. e Souza, J. (1999). "Water distribution network design optimization: simulated annealing approach." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **125**(4), 215-221.
- Dacach, N. G. (1975). *Sistemas Urbanos de Água*. LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, RJ, 389p.
- Deb, A. K. (1976). "Optimizaiton of water distribution network systems." *Journal of the Environmental Engineering Division*, **102**(4), 837-851.
- Eiger, G., Shamir, U. e Ben-Tal, A. (1994). "Optimal design of water distributon networks." *Water Resources Research*, **30**(9), 2637-2646.

- Formiga, K. T. M. (1999). *Metodologia de Otimização de Redes Malhadas Através da Programação Não Linear*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia – Campus II, Campina Grande, PB, 158p.
- Formiga, K. T. M. e Gomes, H. P. (1999a). “Otimização de redes malhadas abastecidas com múltiplos reservatórios.” *XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Belo Horizonte, MG.
- Formiga, K. T. M. e Gomes, H. P. (1999b). “Otimização de redes hidráulicas em sistemas de abastecimento urbano de água.” *XIII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, Belo Horizonte, MG.
- Fox, R. W. e McDolnald, A. T. (1995). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 4ª ed., LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, RJ, 662p.
- Fujiwara, O. e De Silva, A. U. (1990). “Algorithm for reliability-based optimal design of water networks.” *Journal of Environmental Engineering*, **116**(3), 575-587.
- Fujiwara, O., Jenchaimahakoon, B. e Edirisinghe, N. C. P. (1987). “A modified linear programming gradient method for optimal design of looped water distribution networks.” *Water Resources Research*, **23**(6), 977-982.
- Fujiwara, O. e Khang, D. B. (1990). “A two-phase decomposition method for optimal design of looped water distribution networks.” *Water Resources Research*, **26**(4), 539-549.
- Fujiwara, O. e Li, J. (1998). “Reliability analysis of water distribution networks in consideration of equity, redistribution, and pressure-dependent demand.” *Water Resources Research*, **34**(7), 1843-1850.
- Fujiwara, O. e Tung, H. D. (1991). “Reliability improvement for water distribution networks through increasing pipe size.” *Water Resources Research*, **27**(7), 1395-1402.
- Garfinkel, R. S. e Nemhauser, G. L. (1972). *Integer Programming*. John Wiley & Sons, New York, E.U.A., 427p.
- Gargano, R. e Pianese, D. (2000). “Reliability as tool for hydraulic network planning.” *Journal of Hydraulic Engineering*, **126**(5), 354-364.
- Goldbarg, M. C. e Luna, H. P. L. (2000). *Otimização Combinatória e Programação Linear – Modelos e Algoritmos*. Editora Campus, Rio de Janeiro, RJ, 649p.
- Gomes, H. P. (1997) *Engenharia de Irrigação: Hidráulica dos Sistemas Pressurizados Asperção e Gotejamento*. 2ª ed. Universidade Federal da Paraíba, Campina Grande, PB, 343 p.
- Goulter, R. e Bouchart, F. (1990). “Reliability-constrained pipe network model.” *Journal of Hydraulic Engineering*, **116**(2), 211-229.
- Goulter, I. C. e Coals, A. C. (1986). “Quantitative approaches of reliability assessment in pipe networks.” *Journal of Transportation Engineering*, **112**(3), 287-301.
- Goulter, I. C., Lussier, B. M. e Morgan, D. R. (1986). “Implications of head loss path choice in the optimization of water distribution networks.” *Water Resources Research*, **22**(5), 819-822.

- Gupta, R. e Bhawe, P. (1994). "Reliability analysis of water-distribution systems." *Journal of Environmental Engineering*, **120**(2), 51-54.
- Gupta, R. e Bhawe, P. (1996). "Reliability-based design of water distribution systems." *Journal of Environmental Engineering*, **122**(1), 51-54.
- Haimes, Y. Y. (1977). *Hierarchical Analysis of Water Resources Systems – Modeling and Optimization of Large Scale Systems*. McGraw-Hill Book Company, INC., New York, E.U.A.
- Jeppson, R. W. (1979). *Analysis of Flow in Pipe Networks*. 3ª ed., Ann Arbor Science, Michigan, E.U.A., 164p.
- Kansal, M. L., Kumar, A. e Sharma, P. B. (1995). "Reliability analysis of water-distribution systems under uncertainty." *Reliability Engineering and System Safety*, **50**, 51-59.
- Kapur, K. C. e Lamberson, L. R. (1977). *Reliability in Engineering Design*. 1ª ed., John Wiley & Sons, INC., New York, E.U.A., 586p.
- Kessler, A. e Shamir, U. (1989). "Analysis of the linear programming gradient method for optimal design of water supply networks." *Water Resources Research*, **25**(7), 1469-1480.
- Koide, S. (1984). *Otimização de Redes de Distribuição de Água – Estudo de Dois Modelos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, 92p.
- Koide, S. (1998). "Equações simplificadas para a utilização da fórmula universal de perda de carga em tubulações." *Engenharia Sanitária e Ambiental*, **3**(3 e 4), 92-96.
- Lai, e Schaake, J. C. (1969). *Linear Programming and Dynamic Programming Applications in Water Distribution Network Design*. Report 116, Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering, Cambridge, E.U.A..
- Lansey, K. E. e Mays, L. W. (1989). "Optimization model for water distribution system design." *Journal of Hydraulic Engineering*, **115**(10), 1401-1418.
- Leal, A. F. (1995). *Estudo Comparativo de Métodos de Otimização de Redes Malhadas Pressurizadas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia – Campus II, Campina Grande, PB.
- Lencastre, A. (1996). *Hidráulica Geral*. Edição do Autor, Hidroprojecto, Lisboa, Portugal, 651p.
- Loganathan, G. V., Greene, J. J. e Ahn, T. J. (1995). "Design heuristic for globally minimum cost water-distribution systems." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **121**(2), 182-192.
- Martinez, F., Pérez, R. e Izquierdo, J. (1995). "Optimal design and reliability in water distribution systems." In: Cambra, E. e Vela, A. (eds) *Improvement of Efficiency and Reliability in Water Distribution Systems* (em espanhol). Universidad Menedez Pelayo, Valencia, Espanha, 393-424.
- Mascaró, J. L. (1977). *Estudo dos custos de infraestrutura em cidades de porte médio: Sistemas Urbanos de Abastecimento de Água*. Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, USP, São Paulo, SP, 184p.



- Montesinos, P., Garcia-Guzman, A. e Ayuso, J. L. (1999). "Water distribution network optimization using a modified genetic algorithm." *Water Resources Research*, **35**(11), 3467-3473.
- Morgan, D. R. e Goulter, I. C. (1985). "Optimal urban water distribution design." *Water Resources Research*, **21**(5), 642-652.
- Park, H. e Liebman, J. C. (1993). "Redundancy-constrained minimum-cost design of water-distribution nets." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **119**(1), 83-98.
- Porto, R. M. (1999). *Hidráulica Básica*. 2ª ed., EESC-USP, São Paulo, SP, 519p.
- Quindry, G. E., Brill, E. D. e Liebman, J. C. (1981). "Optimization of looped water distribution systems." *Journal of the Environmental Engineering Division*, **107**(4), 665-679.
- Salkin, H. M. (1975). *Integer Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, E.U.A., 537p.
- Savic, D. A. e Walters, G. A. (1996). Comment on "Optimal design of water distribution networks." by Gideon Eiger, Uri Shamir, and Aharon Ben-Tal, *Water Resources Research*, **32**(6), 1899-1901.
- Savic, D. A. e Walters, G. A. (1997). "Genetic algorithms for least-cost design of water distribution networks." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **123**(2), 67-77.
- Silvestre, P. (1979). *Hidráulica Geral*. LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, RJ, 316p.
- Shamir, U. (1973). *Water Distribution Systems Analysis*. IBM Thomas J. Watson Research Center Yorktown Heights, New York, E.U.A..
- Shamir, U. (1974). "Optimal design and operation of water distribution systems." *Water Resources Research*, **10**(1), 27-36.
- Sherali, H. D. e Smith, E. P. (1997). "A global optimization approach to a water distribution network design problem." *Journal of Global Optimization*, **11**, 107-132.
- Sherali, H. D. e Subramanian, S. e Loganathan, G.V. (2001). "Effective relaxations and partitioning schemes for solving water distribution network design problems to global optimality." *Journal of Global Optimization*, **19**, 1-26.
- Sherali, H. D., Totlani, R. e Loganathan, G. V. (1998). "Enhanced lower bounds for the global optimization of water distribution networks." *Water Resources Research*, **34**(7), 1831-1841.
- Smith, E. M. B. e Pantelides, C. C. (1999). "A symbolic reformulation / spatial branch-and-bound algorithm for the global optimization of nonconvex MINLPs." *Computers & Chemicals Engineering*, **23**, 457-478.
- SINIS (1999). *Diagnóstico dos serviços de Água e Esgotos*. Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento, Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), Secretaria Especial de Desenvolvimento Urbano, Presidência da República, Brasil.

- Stark, R. M. e Nicholls, R. L. (1972). *Mathematical Foundations for Design: Civil Engineering Systems*. McGraw-Hill Book Company, INC., New York, E.U.A., 566p.
- Swamee, P. K. e Jain, A. K. (1976). "Explicit equations for pipe-flow problems." *Journal of the Hydraulics Division*, **102**(5), 627-664.
- Tanyimboh, T. T. e Templeman A. B. (1998). "Calculating the reliability of single-source networks by the source head method." *Advances in Engineering Software*, **29**(7-9), 499-505.
- Venturini, M. A. A. G. (1997). *Contribuição ao Estudo da Otimização de Redes Hidráulicas Através de um Modelo de Programação Linear*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Campinas, SP, 97p.
- Vieira, A. M. (1980). *Métodos Iterativos de Análise Hidráulica e Dimensionamento Ótimo por Programação Linear de Redes de Distribuição de Água*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, 226p.
- WAA (1989). *Network Analysis – A Code of Practice*. Water Authorities Association – WAA, Water Research Centre – WRC, Swindon, Inglaterra, 45p.
- Wagner, J. M., Shamir, U. e Marks, D. H. (1988a). "Water distribution reliability: analytical methods." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **114**(3), 253-275.
- Wagner, J. M., Shamir, U. e Marks, D. H. (1988b). "Water distribution reliability: simulation methods." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **114**(3), 276-294.
- Walski, T. M. (1995). "Optimization and pipe sizing decisions." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **121**(4), 340-343.
- Walski, T. M., Brill, E. D., Gessler, J., Goulter, I. C., Jeppson, R. M., Lansey, K., Lee, H., Liebman, J. C., Mays, L., Morgan, D. R. e Ormsbee, L. (1987). "Battle of the network models: epilogue." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **113**(2), 191-203.
- Walski, T. M., Gessler, J. e Sjostrom, J. W. (1990). *Water Distribution Systems: Simulation and Sizing*. Lewis Publishers, INC., Michigan, E.U.A., 321p.
- Xu, C. e Goulter, I. C. (1998). "Reliability-based optimal design of water distribution networks." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **125**(6), 352-361.
- Xu, C. e Goulter, I. C. (1999). "Probabilistic model for water distribution reliability." *Journal of Water Resources Planning and Management*, **124**(4), 218-228.
- Zamora, J. M. e Grossmann, I. E. (1998). "Continuous global optimization structured process systems models." *Computers & Chemicals Engineering*, **22**(12), 1749-1770.